传统文化与数学机械化

傅海伦著



科学出版社
www.sciencep.com

传统文化与数学机械化

傅海伦　著

本书为教育部省属高校人文社科重点研究基地
山东师范大学齐鲁文化研究中心资助项目

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书从传统文化角度探讨中国的数学机械化思想，全面阐述数学机械化的算法程序、发展过程和应用价值。书中对中西古代数学文化进行了比较研究，着重分析了齐鲁文化的特点及其对数学机械化的影响。本书还对中国古代算法的教育价值进行了挖掘、提升，对指导当前的数学教育具有重要意义。本书适于科学史工作者、文化史工作者和相关专业的大学生、研究生阅读，同时也可作为从事数学史、数学教育研究与教学的专业人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

传统文化与数学机械化/傅海伦著.—北京:科学出版社,2003
ISBN 7-03-011397-7

Ⅰ.传… Ⅱ.傅… Ⅲ.数学理论-计算机辅助计算 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第031919号

责任编辑:孔国平/责任校对:柏连海
责任印制:赵德静/封面设计:张 放

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
[illegible]印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年7月第一版 开本:850×1168 1/32
2003年7月第一次印刷 印张:6 5/8
印数:1—2 500 字数:175 000

定价:16.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路各〉)

序

中国传统数学是中国古代最为发达的基础学科之一，自公元前3世纪到14世纪初的1700余年中居于世界数学先进水平，在中国和世界文明史上占有重要地位。

中国传统数学的发展有高潮有低潮。现存最早的中国数学著作是20世纪80年代在湖北张家山汉墓中出土的《算数书》，而最重要的，影响中国和整个汉字文化圈数学约2000年的数学经典则是《九章算术》。前者基本上是秦与先秦完成的，后者的主体及主要成就也是在先秦创造的，而其编定者是西汉的张苍（公元前？—前152）、耿寿昌（公元前1世纪）。战国是封建制度取代奴隶制度的社会大变革时期。秦汉是封建社会发展的初级阶段，奠定了中国作为一个统一国家在体制、事功、疆域、物质文明和思想文化等方面的基础，奠定了中华民族的文化心理结构。战国、秦、汉也是中国传统数学的奠基时期，产生了《算数书》、《九章算术》等数学著作及以数学方法解释盖天说宇宙结构的数理天文学著作《周髀算经》，中国数学迎来了第一个高潮。《算数书》与《九章算术》的主体采取术文（算法）统率例题的形式，其中的分数四则运算法则、比例和比例分配算法（今有术和衰分术）、盈不足术（盈亏类问题解法）、开方术、方程术（线性方程组解法）和正负术（正负数加减法则）、解勾股形等都领先其他文化传统几个世纪，甚至上千年。《九章算术》确立了中国传统数学的基本框架和风格，同时，它的编纂标志着世界数学研究的中心从地中海沿岸的古希腊转移到了太平洋西岸的华夏大地，标志着数学从研究空间形式的几何学为主转变为研究数量关系的算术和代数学为主，也标志着数学由以演绎

逻辑为主的公理化倾向转变为以归纳逻辑与演绎逻辑相结合的算法倾向。《九章算术》中没有任何推导和证明，这是其严重缺点。这当然不是说当时根本不存在推导和证明。事实上，《算数书》与《九章算术》中的许多算法相当复杂，没有某种形式的推导和证明，是不可能得出这样的算法的；从刘徽《九章算术注》(公元263年)中"采其所见"者所透露的信息看，这类推导和证明是确实存在的，只是它们是以类比和归纳推理为主的，也辅以演绎推理。然而，在经世致用的传统思想指导下，编纂者不重视这些我们认为十分宝贵的东西，将其统统删去。

东汉末年至三国，中国封建社会进入一个新的阶段，烦琐的两汉经学和谶纬迷信退出历史舞台，思想界盛行以谈三玄(《周易》、《老子》、《庄子》)为中心辩难之风，秦汉时期被视为异端的墨家也受到重视。数学知识的积累，以及思想界辩难之风和墨家思想的影响，促使魏数学家刘徽撰《九章算术注》。他"析理以辞，解体用图"，提出了许多严格的数学定义，以演绎逻辑为主全面证明了《九章算术》的算法和公式，奠定了中国传统数学的理论基础。他创造了若干新的方法，尤其是对圆面积公式和刘徽原理的证明中，在世界数学史上首次将极限思想和无穷小分割方法引入数学证明，他提出的割圆术和"求微数"的思想奠定了中国的圆周率计算领先世界数坛千余年的基础，而解决多面体体积理论的刘徽原理实际上在考虑20世纪数学大师希尔伯特的第三问题所涉及的内容。这表明中国数学进入了第二个高潮。南朝宋齐间祖冲之(429～500)的《缀术》是一部比刘徽《九章算术注》更高深的著作，可惜隋唐算学馆的学官"莫能究其深奥，是故废而不理"，遂失传。目前我们知道的只是祖冲之父子在刘徽的基础上推进的两项成就。

自唐中叶起，随着农业、手工业和商业的大发展，中国封建社会出现许多新的因素，到宋元时期，发展得更加完备。同时，虽然出现了程朱理学，但尚未取得统治地位，思想界比较宽松。中国古

代科学技术发展到一个新的高峰。宋元数学是中国筹算数学的最高潮。北宋贾宪(11世纪上半叶)、南宋秦九韶(1202? - 1261?)、金元李冶(1192 - 1279)、元朱世杰(13世纪下半叶、14世纪初)等数学家创造贾宪三角、增乘开方法、天元术(设未知数列方程法)、四元术(多元高次方程组解法)、大衍总数术(一次同余式组解法)、垛积术(高阶等差级数求和法)和高次招差法等,取得了超前其他文化传统几个世纪的成果,有的甚至是欧洲大数学家在18、19世纪才通晓的。另一方面,人们改进筹算乘除捷算法,杨辉(13世纪下半叶)、朱世杰等总结了这类口诀,导致新的计算工具珠算盘的产生,最后完成中国计算工具的改革。

中国传统数学以算法为中心,数学理论密切联系实际,这是中国数学史学科的奠基者李俨(1892 - 1963)、钱宝琮(1892 - 1974)早已指出的。而认识到中国传统数学的算法具有强烈的程序化、机械化的特点,则主要是吴文俊先生的贡献。他自己就是受到中国传统数学中程序化、机械化思想的启发,而开辟了数学机械化研究方向的。众所周知,吴先生在这一方向的研究上取得了杰出的举世瞩目的成就。机械化、算法化倾向的增长,是20世纪后半叶以来数学发展的重要特征之一。

20余年来,中国数学史界虽有许多学者在不同程度上关注中国传统数学算法的程序化、机械化问题,可是缺乏全面系统的论述。虑及此,傅海伦在开始博士论文研究时,我建议他以《中国传统数学机械化思想》为题。这一方面是因为该课题有利于他毕业后进一步开拓研究工作;另一方面则是他在研究费用上得到了吴文俊先生的帮助。原来在1996年,我正在考虑傅海伦的博士论文做什么题目的时候,接到中国科学院系统科学研究所科研处的一封信,云他们科研处有我2000元人民币,询问如何转给。我摸不着头脑,打电话问是怎么回事。答云:"有一青年学者拜访吴先生时,谈到数学史界科研经费困难。吴先生想从他的科研经费中拨

出10 000元，资助你和另外4位数学史工作者，问科研处怎么办？我们建议以"科研合作"的名义资助。吴先生的帮助真是雪中送炭。因为当时傅海伦做博士论文的经费还没有着落，我当即决定将吴先生的资助全部用于傅海伦做博士论文，并与傅海伦商量，将论文题目定为与吴先生的研究方向有关的《中国传统数学机械化思想》，以符"科研合作"之实。

现在，傅海伦博士将其博士论文增补为《传统文化与数学机械化》出版，是一件有益的事。本书考察了中国传统数学产生机械化思想的计算工具、记数制度以及算法基础，指出变换技术和改进算法是数学机械化的核心内容，并对数学机械化与《周易》的关系做了剖析。本书在前人工作的基础上比较全面系统地探讨了中国传统数学框架的确立、数学理论的奠基、筹算数学的高潮等三个阶段的数学机械化思想的特点，对一些典型的一直在世界上领先的计算程序做了深入分析，揭示了它们的算法结构，编制了现代计算机语言，有许多创建性见解。对数学史界争论不休的秦九韶"求定化约"法的诠释，以及以位置化代数的观点重新审视天元术，以有向化方法解释四元术，等等，亦可成一家之言。本书考察了儒学的经世致用思想对数学机械化思想的影响，并从数学文化的角度分析了中西分别形成演绎逻辑倾向与机械化算法倾向的原因，在中国数学史研究中别开生面。这既是一部有创建的学术著作，又是适宜于中等以上文化程度的人们学习中国数学史知识的有益读物。

当然，本书的研究还是初步的，许多问题有待于深入，有的看法还会有不同意见。无论如何，本书是关于这个问题的一个良好开端。

郭书春

2002年12月

于中国科学院自然科学史研究所

前　言

本书是我在博士论文《中国传统数学机械化思想》的基础上补充、完善而成的，从论文写作到该书的定稿，都得到了我的导师郭书春研究员的关怀和悉心指导。回顾我在中国科学院自然科学史研究所攻读博士学位的三年岁月，真是感慨万千。郭老师较早给我定下来论文的题目，说是之所以选取了与吴文俊先生的研究方向有关的课题，是因为我有幸在研究经费上得到了吴先生的资助。我当时深感这个题目的分量和心里承受的压力，主要是担心自己才疏识短，不能胜任这个课题的研究而愧对前辈的厚望。我在正式写作前，曾将论文的构思及一些想法随郭老师一起向吴老作了汇报，吴老十分高兴，他在鼓励我研究好这个课题的同时，也提出了一些意见。吴老的鼓励和教导成了我以后学习和研究的动力。我在写作及论文答辩过程中，还承蒙李文林研究员、刘钝研究员、王渝生研究员、何绍庚研究员、李迪教授、李兆华教授五位老师的多方指教。师兄邹大海副研究员不仅慨然提供私人藏书，而且主动帮助我解决了许多学习中的困难。韩琦、田淼、汪晓勤、乌云其其格等众多学友也给了我不少鼓励和关照。在此特表示衷心感谢。

到山东师范大学工作以来，平时有繁重的教学任务，但我一直没有放弃对中国传统数学机械化思想的进一步研究与学习，特别是受源远流长的齐鲁文化的影响，我开始对山东古代数学家的工作，特别是在数学机械化的贡献方面有了更浓厚的兴趣，这促使我进一步探讨齐鲁文化与数学机械化的关系。2001 年 8 月，在灵岩寺召开的学校研究生培养工作会议期间，我有机会将自己近年来的科研情况及将来工作的设想向山东师范大学副校长、齐鲁文化

研究中心主任王志民教授作了汇报，王校长很感兴趣，并鼓励我申报教育部省属高校人文社科重点研究基地——山东师范大学齐鲁文化研究中心的科研课题。当"传统文化与数学机械化"作为该研究中心重点课题正式立项后，我就着重从传统文化特别是齐鲁文化对中国古代数学机械化的作用与影响出发，特别关注了齐鲁地区数学家的数学机械化思想及形成原因。最后，我将近年来的一些工作整理、充实，把原来的博士论文增补为《传统文化与数学机械化》。该书的出版得到了齐鲁文化研究中心各位领导和老师的大力支持，得到了该研究中心和山东师范大学出版基金的资助。在本书即将付梓之际，我要特别感谢山东师范大学齐鲁文化研究中心的王志民教授、魏健教授和朱亚飞教授，正是由于他们的关怀、支持和帮助，才使我较好地完成本课题的研究任务，并使该书得以顺利出版。

由于我正在主持国家自然科学基金委数学天元青年基金科研项目——"中国传统数学机械化原理、方法与现代发展"的研究，本书的出版也是这个科研项目的研究成果。同时本书还是我的"山东省高校第五批中青年学术骨干"三年计划任务以及"山东省优秀中青年科学家科研奖励基金"所列项目的主要研究内容，该书的出版也得到了以上科研项目基金的资助。

本书试图从数学史的内史与外史相结合的角度全面系统地研究中国传统数学机械化的思想，探讨数学机械化思想的产生、发展过程和现代进展，着重分析中国传统数学中代表性的算法机械化程序特点，并在对传统文化、思维方式剖析的基础上，试图从中西古代数学文化的差异比较方面揭示中国传统数学机械化的思想及形成原因。书中注重研究了以刘徽为代表的齐鲁地区中国古代数学家的数学机械化工作，重视以齐鲁文化为背景，分析论述传统文化对数学机械化的作用和对数学家思想的影响。该书中的不少内容已经发表在《自然辩证法研究》、《自然辩证法通讯》、《古籍整理

学刊研究》、《科学技术与辩证法》、《大自然探索》、《数学教育》(香港)、《数学传播》(台湾)、《科技导报》、《自然杂志》、《教育史研究》、《数学教育学报》等学术刊物上。

数学史与数学教育结合的问题,是我一直关注并致力于研究的课题方向。2002年我申请到了教育部青年专项课题项目——"数学史在数学教育中的应用研究"(EHA010449)。我在对中国传统数学机械化思想的研究过程中,深刻体会到不少中国传统的算法对现代的数学教育和教学有重要的指导意义和借鉴价值。因此,本书中选取的一些章节如"盈不足算法的现代教育意义"、"从RMI原理看盈不足的构造及算法程序"、"贾宪三角的教育价值"、"四元筹式布列的有向化方法"等,都是我在该专项课题研究中的成果。

我在写作过程中,参阅了许多科技史、科学哲学与数学史方面的论著和文献资料,也吸收了不少前辈及同仁近年来的研究成果,在此表示诚挚的感谢。由于本人学陋识薄,在研究过程中深感还有一些问题没有解决,书中也一定有不少疏漏及错误之处,恳请各位前辈、同仁和读者批评指正。

本书在出版过程中得到了科学出版社孔国平编审的大力支持和帮助,我的研究生李文婧、聂力也帮我校阅了部分书稿,在此一并表示感谢。

傅海伦

2003年3月18日

于山东师范大学

目　录

第1章 导　论

贯穿在整个数学发展历史过程中有两个中心思想：一是公理化思想，二是机械化思想。公理化思想导源于古希腊数学，约公元前3世纪的《几何原本》是建立在公理化体系上的数学典范，也是公理化思想的滥觞，在现代数学尤其是纯粹数学中占据着统治地位[1]。中国古代数学却表现出与西方数学明显不同的知识体系和思想方法，总的来说，中国古代数学乃是机械化体系的代表，其思想着眼点就在于"机械化"[2]。与古希腊及其延续的数学公理化的传统相对应，从问题出发，以解决实际问题为目的，建立算法的机械化则是中国古代数学研究的传统。我国当代著名数学家吴文俊先生通过长期深入研究和全面考察中国数学史，总结出中国数学传统的机械化思想。吴先生在《〈九章算术〉及其刘徽注研究》序中说："我国的古代数学基本上遵循了一条从生产实践中提炼出数学问题，经过分析综合，形成概念与方法，并上升到理论阶段，精炼成极少数一般性原理，进一步应用于多种多样的不同问题。从问题而不是从公理出发，以解决问题而不是以推理论证为主旨，这与西方之以欧几里得几何为代表的所谓演绎体系旨趣迥异，途径亦殊。由于形形色色的问题往往归结为方程求解，因而方程求解就成为中国传统数学《九章》以来发展中的一条主线。这与西方数学之以定理求证为中心者正相对照……我国传统数学在从问题出发以解决问题为主旨的发展过程中建立了以构造性与机械化为其特色的算法体系，这与西方数学以欧几里得《几何原本》为代表的所谓公理化演绎体系正好遥遥相对。《九章》与《刘注》是这一机械化体系

---

[1] 吴文俊．吴文俊文集．山东教育出版社，第298页，1986年

[2] 吴文俊．吴文俊文集．山东教育出版社，第98页，1986年。

的代表作，与公理化体系的代表作欧几里得《几何原本》可谓东西辉映。”吴文俊先生正是在我国古代数学机械化思想与成就的启发和鼓舞下，在数学机械化方面取得举世瞩目的成就。正如他说的：“经过对中国古代数学学习的触发，结合着几十年来在数学研究道路上探索实践的回顾与分析，终于形成了这种数学机械化的思想。这种思想一旦形成，就自然地化成一股顽强的动力。”[1]

数学机械化思想和数学公理化思想分别代表着东西方数学发展的主流，在数学发展史上，总是相比较而存在，具有各自相对独立发展的一面，也有相互联系、相互作用而交叉发展的另一面。首先，从历史来看，数学本来就是沿着两条路线发展的：一条是从希腊欧几里得逻辑演绎体系下来的；另一条是发源于中国，影响到印度，然后影响到世界的数学。东西数学两大体系、两种思想差不多是各自独立发展起来的，在数学漫长的历史中非但没有相互代替，而是以其自身的内容和运行机制表现出各自不同的风格和特点。一般地说，公理化思想着重“封闭式”的理论构建，强调逻辑演绎体系和非构造性思维方式下的“存在”；而机械化思想着重构造性实践，强调“经验”、“发现”和构造性思维方式下从无到有的发明。两种思想各有优势，共同存在，相互补充。由于人们的思维方法本来也不只是单一的模式，东西方数学的两种思想方法分别反映乃至适应了各民族科学文化的特定环境和传统思维方式的不同特点而获得相当程度的独立发展。其次，处于同一思维水平的人们的数学思想在很大程度上又具有内在一致性，这正是我们生活于其中且也属于它的物质世界统一性的一种反映。在希腊有句名言：“规律总是相同的。”人类社会和科学发展到一定程度，总会出现一些相同的东西。建立在机械化思想的数学总是自觉或不自觉地在公理化数学原则的作用下进行研究和探索；而建立在公理化思想的数学中又总存在着机械化数学的因素，“纯净”的机械化数学和公理化数学都是不存在的，这在几何学中尤为突出。在古希腊时代，

---

[1] 吴文俊，吴文俊文集，山东教育出版社，前言，1986年。

对待几何学就有阿基米德和欧几里得的两种不同体系。前者以阿基米德的有关著作为代表，着重研究几何图形的数量特征或其度量，诸如圆周率、球面面积以及抛物线、弓形面积的计算等等；后者以《几何原本》为代表，把数量关系完全排除在外，而单纯追求各种几何事实间的逻辑关系，以此建立起几何公理体系成为演绎推理方法的典范。这两种不同的体系，中国古代几何兼而有之。中国的早期几何学并不仅仅是经验公式的总结而没有论证性质，战国时期墨家的代表作——《墨经》，是在与欧几里得诞生(公元前 330 年)的同时问世的。《墨经》是我国论证几何学的萌芽，在至今有传本的 53 篇中的"经上"，记录了许多几何学名词的定义，"经说上"给出各条经文补充说明。墨家后学所作共六篇，其中《小取》是一篇关于逻辑学的完整论文，其中提出墨家逻辑的三个手段："以名举实，以辞抒意，以说出故。""名"是概念，"辞"是判断，"说"是推理，很类似演绎数学中的定义、定理和证明。同篇还提到效、譬、侔、援、推等五种推理方法，既有演绎法，又有归纳法和类推法[①]。但事实上，墨家的思想并未能发展成为数学的主流。以后中算家的几何学，并不追求逻辑论证的完美，而是着重于实际计算问题的解决，"析理以辞，解体用图"，以建立解决问题的一般方法和一般原则；但另一方面，这种几何学又是以面积、体积、勾股相似等为基本概念，以长方形面积算法、长方体体积算法、相似勾股形的性质为出发点的，整个几何理论建立在"出入相补原理"、"祖暅之原理"、"勾股不失本率原理"及"刘徽原理"等基本原理基础之上。例如，由勾股定理自然地引起平方根的计算问题，而求平方根和立方根的方法，其步骤就是以出入相补原理为几何背景逐步索骥而得。这说明，公理化数学原则在自觉或不自觉地被运用着并随着数学的发展而发展。而古希腊的论证几何到了公元 1 世纪前后，也产生了一种十分接近于我国占主要地位的计算和代数体系的几何学，这可见于当时的两部著作——《计量术》和《几何学》。希腊和

① 刘钝，大哉言数，辽宁教育出版社，第 66 页，1993 年。

我国几何学的这种奇妙的交叉发展，充分说明在数学的历史长河中，各学科都是在多种思想和方法的探索中前进的。

不仅如此，从数学有史料为依据的几千年发展过程来看，以公理化思想为主的演绎倾向和以机械化思想为主的算法倾向往往互为消长，各自对数学的发展做出了贡献。一方面，公理化思想为人们认识世界提供了演绎推理的模式和理性证明的手段，从而把数学知识组织成为一个严密的逻辑体系，形成数学理论，对数学乃至科学的发展发挥了巨大作用，以至于现代数学几乎都是按《几何原本》公理化方法建构起来的；另一方面，自公元前3世纪阿基米德之后，希腊数学开始衰落，公元前1世纪《九章算术》的出现，标志着世界数学重心由古希腊让位给中国，数学机械化算法体系成为数学发展的主流。机械化思想作用下的中国传统数学从问题出发以解决问题为宗旨，其成果之辉煌，远非同时代世界其他的数学可以相比。机械化的算法内容，提高了解决实际问题的能力，这种理论联系实际的重应用、重计算技术的思想是推动数学发展的动力之一，因而在数学的发展中，这种数学思想具有普遍意义。例如在17世纪分析数学产生之初，就不是靠理论的严格，而是靠实际应用的成功来保证数学的"可靠性"的，因而它获得迅速发展，开创了数学发展的新阶段。对近代数学起着决定作用的解析几何与微积分，实质上都是机械化思想而非公理化思想的产物。现代应用数学就是按应用方向或主要应用的数学模型分类的。把对一个数学定理的证明转化为利用适当算法的一个机械化的计算是现代数学的重要目标之一。不少著名数学家正日益重视计算机的广泛使用和算术化的倾向在纯粹数学中的作用，纷纷转向计算机代数、计算机几何等新兴学科，吴文俊先生在几何定理的机器证明上居于世界前列，其方法被称为"吴方法"。他高瞻远瞩，在《〈九章算术〉及其刘徽注研究》序中指出："肇始于我国的机械化算法体系，在经过明代以来近几百年的相对消沉后，由于计算机的出现，已越来越为数学家所认识与重视，势必重新登上历史舞台。"同时，他又说："中国古代算术的思想与方法，正好与现代计算机的使用融合无间，

也必将因此而重返青春、以另一种崭新面貌在未来的数学发展中扮演重要角色。"① 吴先生还在《汇校〈九章算术〉》（郭书春著）序中预言："《九章》所蕴含的思想影响、必将日益显著、在下一世纪中凌驾于《原本》思想体系之上、不仅不无可能，甚至说是殆成定局。"

---

① 吴文俊，对中国传统数学的再认识，百科知识，1987年第7、8期。

第 2 章　数学机械化思想的产生和发展

2.1　机械化、数学机械化及其特征

数学是研究数和形的巧妙变化，无论数学的学习还是创新，都是一种典型的脑力劳动，这种脑力劳动大体可分为两种类型：其一是规律性强，运算繁杂，例如代数学中的线性方程组的求解。其二是解题难度大。主要涉及推演的技巧，但步骤较少，例如几何学中的定理的证明，它常常需要依靠直观、洞察和经验，来寻找捷径。这两种类型都涉及数学研究本身的量与质的辩证关系。

何谓机械化？按吴文俊先生的解释，“所谓机械化，无非是刻板化和规格化”[①]。吴先生借用现代机器和计算机的工作来说明机械化：一方面，无论是机器代替体力劳动，或是计算机代替某种脑力劳动，其所以成为可能，关键在于所需替代的劳动已经“机械化”，也就是说已经实现了刻板化或规格化；另一方面，随着现代机器性能和计算机技术的提高，大量复杂的劳动都可交由机器操作进行，这必然会进一步刺激并促进脑力劳动的机械化。简单刻板的机械化动作，不仅可以让机器来实现，还为自动化铺平了道路，就这一意义来说，数学中的某些脑力劳动与体力劳动颇有共同之处，它们也就同样可以机械化[②]。数学机械化是用机器代替人的部分脑力劳动，主要是处理量的复杂运算，用量变换取质变，数学家可以借助智力的工具来发明新的数学定理和公式。数学由于符号形式而易于运算和推理，故研究问题时，人们可以暂时撇开符号的意义而仅着眼于形式，当符号与一定的概念单值地对应时，思想

---

① 吴文俊，吴文俊文集，山东教育出版社，第 296 页，1986 年

② 同上。

的操作可转换为对符号的操作，而符号的操作可委托机器进行，故人们利用符号借助计算机，便可使复杂、繁重的脑力劳动机械化，从而实现智力的解放。从认识论上看，数学思维既有创造性活动又有非创造性活动，二者是互为前提、相互制约、相互转化的。非创造性工作是创造性工作的基础，创造性工作又可以通过某种途径部分地转化为非创造性工作，当我们通过构造算法程序把求解问题的创造性工作转化为非创造性工作之后，也就有可能把问题的求解过程交由机器来完成，这便是数学思维的机械化。数学问题的机械化就要求在运算或证明过程中，每前进一步之后，都要有一个确定的、必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论。

由此看来，所谓数学机械化，即是把要求解或证明的某一类问题(这类问题可能成千上万，也可能无穷无尽)当作一个整体加以考虑，建立一种统一的，确定的求解法则或证明程序，使得该类中的每一个问题，只要按照此程序机械地(死板地)、按部就班地一步一步实施下去，经过有限步骤之后，即可求得问题的解或推断出数学命题的结论是否为真，命题为真时即为定理。对一类问题而言，这种统一的、确定的求解或证明的方法称为数学问题的机械化方法，一般表现为机械化程序，它具有以下几个特点：

(1) 确定性。即程序是“一义”的规定，没有歧义的理解，运用时是可行的。

(2) 预见性。在执行这个程序时，每一步都可预见到确定的下一步怎么办。

(3) 普适性。程序普遍适用于解决问题所在的同一类其他任何一个问题。

(4) 具体性。即实现具体求解，能在有限步内达到“最后”一步，得出所要求的具体结果。

数学机械化又是创造性思维和非创造性思维活动的统一。建立统一的、确定的计算或证明机械化程序的过程就是创造性思维活动的过程，这是实现数学机械化的关键；按照固有的程序实施机

械化求解或证明，这是将思维的创造性工作部分地转化为非创造性工作的过程，也是完成思维机械化操作的过程。

2.2 数学机械化思想的起源

数学机械化思想来源于中国古算，并贯穿于中国古算整个发展过程之中。中国传统数学乃是机械化体系的代表。中国古算以算法为中心，注重计算，以解决问题为主旨，几乎不考虑离开数量关系的图形的性质，而是通过切实可行的方法把实际问题化归为一类数学模型，然后构造一套机械化的算法，并按程序化的要求，一步步求出具体的数值解。算法的程序化是中国古代数学的重要特点。算经中的"术"全是计算公式或计算程序或应用这些公式、程序的细草。所有的问题都要算出具体数值作为答案，即使是与图形有关的几何问题也不例外，这就是几何方法与算法的有机结合或几何问题的算法化。从问题出发，建立算法的机械化一直是古代中国数学研究的传统，也是中算家努力的方向乃至孜孜以求的目标。成书于公元前1世纪的《九章算术》是算法机械化的光辉典范。书中归纳了九类数学问题，每章中讨论一类，基本上采取算法统率应用问题的形式，给出解答。《九章算术》提出了世界上最早、最完整的分数四则运算法则及各种比例和比例分配算法，也提出了世界上最早、最完整的多位数开平方、开立方程序，线性联立方程组的解法及有关正负数概念与移项法则，也最早见于此书。《九章算术》中的数学机械化思想被后代数学家所继承和发展，魏晋时刘徽发展了多种算法，其《九章算术注》是对数学机械化算法的重大贡献，刘徽以率的基本运算为"纲纪"，实现了筹式运算的模式化和程序化，把以筹算为基础的算法提高到理论的高度。开平方、开立方的机械化过程，到宋代更发展成为高次代数方程求数值解的机械化算法，贾宪求贾宪三角各廉的增乘开方法、贾宪并创而秦九韶完善的求高次方程正根的正负开方术、《数书九章》中的大衍求一术解法、李冶使用的天元术等等都是一套比较复杂的计算

程序,许多程序可以直接搬到现代电子计算机上实现。被西方推崇为中世纪最伟大的数学家朱世杰,其数学名著《四元玉鉴》(1303年)中,已给出了高次代数联立方程组的解法(未知数的个数最高可达4个),成为机械化证明的代数基础。而这类问题的求解却长期困惑着近代数学家们,在近代,解高次联立方程组的方法直到近二三十年才有重大进展。不仅如此,宋元时期的"天元术"以至于"四元术",实则建立了一整套的代数机器,包括天元、地元、人元、物元等相当于现代未知数的概念,并建立这些元正负乘幂及其代数式运算系统,即可把几何问题转化为代数方程与方程组的求解问题。以天、地、人、物等元代替所求线段,用它们的代数式来表示几何图形的长度、面积,然后运用相伴发展了的那套代数机器进行求解。所有这些,正好与笛卡儿(Descartes)的工作相通,是解析几何得以创立的决定性一步。第二次世界大战之后,电子计算机的诞生、普及和发展,促使人们重新认识以中国为主体的古代东方数学的程序化思想与机械化算法体系。实际上,中国传统数学的许多计算程序不仅是与现代电子计算机原理相通的,而且这些思想对今天的数学教学与研究仍有启迪作用。中国传统的机械化与代数化思想应该合理地继承和发扬,吴文俊关于数学机械化的研究工作,就是这些思想和成就启发之下的产物,它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承。

2.3 数学机械化思想的产生和发展

在数学机械化思想发展史上,不仅中国古代的众多数学家为之做出了重大贡献,而且无数西方数学家也为之倾注心血。数学机械化就沿着这些数学家及数学大师们坚持不懈地求索所开辟的道路向前一步步发展。

一、笛卡儿的宏伟设想

17世纪中叶,建立坐标系从而把变量引入数学的法国数学

家、哲学家——笛卡儿，开始看到代数的巨大潜力，"他把代数看成是进行推理——特别是关于抽象的和未知的量进行推理的有效方法，他认为代数使数学机械化，因而使思考和运算步骤变得简单，而无须花很大的脑力。这有可能使数学创造变成一种几乎是自动化的工作"[1]。为此，笛卡儿在其未发表的著作中提出过宏伟的设想：将一切问题转化为数学问题，数学问题都可化为代数问题，而一切代数问题都归结为单个代数方程的求解问题，通过对各类方程给出标准解法，以实现其问题求解过程的机械化。即，任意问题→数学问题→代数问题→解方程组

$$\begin{cases} p_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots \\ p_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{解方程 } p(x) = 0$$

这里的 p_i 及 p 均为多项式。尽管笛卡儿的设想未能实现，但这一深刻的思想对其后的数学发展有着重大影响。现在知道，上述每一步未必行得通，即使行得通是否现实可行也是问题。吴文俊先生曾在此方面做出了贡献。首先，他认真研究了笛卡儿的宏伟计划与中国传统数学的关系，认为："回顾我国从秦汉到宋元间数学发展的历程，可谓我国传统数学所走过的道路正好与 Descartes 的计划若合一契；反过来，Descartes 的计划，也无异于为中国传统数学作了一个很好的总结。"[2] 在此基础上，他提出一套完整的算法，使得代数方程组通过机械步骤消元变成一个代数方程，并将解代数方程组扩大为带微分的代数方程组，从而大大扩张研究问题的范围，这种方法不仅能证明定理，而且能自动发现定理，这大大优越于现有的任何方法。

笛卡儿是数学机械化的先驱之一。他给出研究几何学总方案的本质，即几何学的算术化：将几何问题归结为代数方程，对每一

---

① [美]M. 克莱因，古今数学思想(第一册)，张理京等译，第 328 页，上海科学技术出版社，1979 年。

② 吴文俊，对中国传统数学的再认识，百科知识，1987 年 7、8 辑。

类方程给出标准的(根的)作图——也即一种标准的解法。他认为所有的几何问题都可以归结为代数方程的求解,依他的方案就可用一种程序化、标准化方式解决所有的几何问题。

分析笛卡儿研究方案,可以看到他具有以下机械化特征:

(1) 顺序性与迭代性。笛卡儿方案是将所有几何问题按复杂程度分类、排序。然后,从最简单的类出发,逐类循序解决问题。

(2) 标准性与自动性。笛卡儿对一、二次方程甚至五、六次方程给出的是标准作图过程。任何一个几何问题,不论其具体如何,在化成一定类的方程后,都可以按步骤套用相应的标准作图。

(3) 确定性。只要严格遵循笛卡儿指示的步骤,在有限步之后必能得出所要的确定的结果。

(4) 普遍性。总的来说,他的方案可以解决一切几何问题。从部分来说,他对每一类方程的作图方法可以解决一整类几何问题。他认为这是他的方法与古希腊几何学家最重要的区别。

这些特征不仅是数学机械化特征,也是一般思维的指导原则。在此思想指导下,笛卡儿把数学作为一个例子即获巨大成功。那么机械化思想对于今天科学探索、思维研究将更具有指导意义。有序与迭代、标准与自动、确定性、普遍性是科学所求的最终目标,只有达到机械化才能是科学的。

从方法论上说,笛卡儿的"几何代数化"思想为我们提供了一个崭新的数学证明方式,它克服了欧几里得从几何到几何的这种"纯几何"证明模式的限制,率先打破了欧几里得几何对数量关系的排斥态度,使几何定理的证明在理论上可以化为纯代数问题,从而导致了解析几何新学科的诞生。利用坐标法将点表示为坐标的形式,将曲线化为方程,通过研究方程的特性从而间接证明曲线的性质,这是数学史上的重大事件,它宣告了新的方法论的重大胜利,为进一步实现几何证题的机械化打下了坚实的基础,推动了微积分学和数学机械化的产生与发展。

二、莱布尼茨(Leibniz)的初步尝试

17世纪，微积分学的创始人，德国数学家、哲学家莱布尼茨在笛卡儿的“几何代数化”思想基础上提出了进一步证明机械化的设想，即是否有某种通用的方法，使巧而难的几何证明题像繁而易的数值计算那样，沿着一条有规律的、可以确定的机械化步骤来进行，并保证在有限步骤之后，肯定或否定定理成立呢？莱布尼茨第一个明确提出应用数学方法来研究逻辑的思想，为此他提出“彻底的符号化”并发展起相应的推理演算，这是指将推理的有效性问题转化为计算的正确性问题，这实质上包含了应使推理演算化的思想。莱布尼茨曾设想：我们要造成这样一个结果，使所有的推理都成为计算的错误。这样当争论发生的时候，只需计算就可分明是非了。由于实现了彻底的符号化，因此，在所谓的“通用语言”(通过使用简单明了的符号及合理法则，已不再具有自然语言所固有的诸如含糊性、不规则性等弊病，从而也就将取代自然语言而成为理想的、世界性的公共语言)中，逻辑推理的过程就相当于符号(系列)的变形，而这与通常数学中所作的计算如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$等等，是十分相似的，也即是一种演算过程。为了实现这一使逻辑“数学化”的计划，莱布尼茨设想过数学领域的推理机器，这可看做机械化思想的初步尝试，以图把人类关于理性的归纳和演绎机械化，“使人们在任何领域中都能(至少在一定程度上)通过一种像算术与代数那样的演算来达到精确的推理”，这样“所有的推理错误都只能成为计算的错误，这样当发生争论的时候，两个哲学家同两个计算家一样，用不着辩论”。他已清楚地认识到这一计划的重要性，他指出：“这是十分有价值的，把计算交给机器去做，可以使优秀的人才从繁重的计算中解脱出来。”他还预言：“一旦完成了这一计划，人类就将获得这样一种新工具，它对于人类理解能力的增强程度将远远超出任何一种光学仪器对于视力的加强。”[1] 但是，由

[1] 转引自郑毓信、林曾、数学·逻辑与哲学，湖北人民出版社，第61页，1987年

于当时生产力水平不高，这种以机器模拟人脑思维活动的研究没有能迅速地发展，因而推理机没有制造出来，实际上，莱布尼茨并没能实现自己的计划。

三、希尔伯特(Hilbert)机械化定理的提出

对于20世纪数学发展做出重大贡献的希尔伯特最先从理论上明确提出定理证明机械化的思想。他在1899年出版的经典名著《几何基础》(Grundlagen der Geometrie)中叙述了数学机械化思想，使莱布尼茨的证明机械化设想有了明确的数学形式。《几何基础》把几何公理系统与数量关系的沟通作为主题。希尔伯特这一名著是以公理化的典范而著称于世的，但吴文俊认为，该书更重要之处，是在于提供了一条从公理化出发，通过代数化以达到机械化的道路。事实上，希尔伯特本人在其数十年的数学生涯中，是一直遵循一条几何代数化的道路来不断探求数学机械化途径的。从公理系统出发，建立坐标系，引进数系统，把几何定理的证明转化为代数式的计算，这是一条从公理化走向代数化直至数值化的道路。然而，希尔伯特对数学这一深刻的认识却长期为数学家们所忽视。

希尔伯特在这部数学著作里写进了一条机械化定理：初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化。这是该书主体部分的最后一条定理，也就是最早出现的著名的希尔伯特机械化定理。

希尔伯特证明方法的要点是：从他提出的五组几何公理出发，详细论证了到达代数化的具体步骤，建立起解析几何。再根据待证的几何定理选定一个坐标系，将定理假设和结论的几何关系表示成数标及其方程。其中某些数标是任意的，称为参数，记为 u_1、$u_2, \cdots, u_m$，另一些受假设中几何条件约束的数标称为束数，记为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。由于希尔伯特只讨论某种构造型交点定理，其几何元素只要通过联线、作平行线、相交等手续逐步做出，因而可将这些数标排成某一次序，使其依次出现。经过简单化约，几何定理的假设可以表示成关于 x_i 的线性方程组：

$$A_i x_i + B_i = 0,\ i = 1,2,\cdots,n \quad (1)$$

其中 A_i、B_i 是关于 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 与 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式。而几何定理的结论可表示为方程：

$$g(u_1,u_2,\cdots,u_m,x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \quad (2)$$

其中 g 也是多项式。

这样，证明几何定理就转化为证明方程(2)是(1)的结果。为此，只要从(1)逐步约化出

$$x_i = P_i/Q_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 P_i，Q_i 都是 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 的多项式。再将 x_i 代入 g 中，由于 u_i 都是参数，只要按某种机械化程序直接计算就可验证 g 是否为零，从而判断几何命题是否成立。上述证法使几何定理的证明彻底成为一个可以机械化操作的过程。通过数理逻辑学家的艰苦努力，有关机械化的适用范围的讨论逐步深入，其中最值得称道的是波兰数学家塔斯基(Tarski) 证明了初等几何(以及初等代数)的定理证明可以机械化，被称为塔斯基定理。但塔斯基的定理并没有解决如何进行机械化证明的具体方法，如何寻求切实可行的证明途径成为问题的关键。

四、定理的机器证明

所谓定理的机器证明，是指使用计算机证明定理的成立，即把人证明定理的过程，通过一套符号体系加以形式化，变成一系列在计算机上自动实现的符号计算过程。其实质是把具有智能特点的推理演绎过程机械化。定理的机器证明是人类智能的主要研究课题之一。从传统的手工证明到定理的机器证明，是现代数学思想方法的一次重大突破。

机器证明大体上经历了这样一个过程：

公理化——代数化——坐标化——机械化

近代的机器证明思想由莱布尼茨首先提出，并直接导源于他的定理证明机械化设想。到19世纪末，希尔伯特等创立并发展了数理逻辑，为定理证明机械化提供了一个强有力的工具，使这一设

想有了明确的数学形式。20世纪初，数理逻辑学家对定理证明的机械化进行了大量的理论探索，但是他们大都否定了机械化证明的可能性，其中最有代表性的就是哥德尔等人的一条著名定理：初等数论定理证明的机械化是不可能的。

电子计算机产生以后，人们开始真正设想，能不能使得数学研究这样的脑力劳动机械化呢？自20世纪二三十年代，数理逻辑学家们开始关注利用计算机进行数学证明的问题。在此之前，尽管几代数学家都为定理证明机械化做出过不懈的努力，然而，由于数学家只使用简单的计算工具，实际上都未能取得良好的结果。直到电子计算机的问世，给这一领域的研究带来了新的生机。特别是20世纪40年代电子计算机的发展，为机器证明定理提供了物质条件，使这一设想的实现有了现实可能性，因此推动证明机械化的研究蓬勃发展起来。

到了50年代，机器证明开始兴起成为一个数学领域。波兰著名的数学家、逻辑学家塔斯基（A. Tarski, 1902～）为此做出了贡献。他在1948年的一本经典著作《初等代数和几何的判定法》中，证明了一切初等几何及初等代数范围内的定理证明是可以用计算机判断的，并且给出了具体的机械化证明的方法，这为人们开始这方面的可行性研究树立了信心。1950年，他推广了代数上的斯图姆定理，并从本质上提出了一大类数学问题是可以判定的，从而打破了哥德尔不完备定理笼罩判定定理论的沉闷气氛。

值得指出，塔斯基早年虽然证明了初等代数、初等几何可以机械化，但真正地在计算机上实现却是十分复杂的，以至到了难以真正证明的地步。尽管他给出了相应的机械化算法，但其算法太繁杂，只能证明少量极简单的定理，甚至连中学课本中的许多定理都证明不出来。尽管塔斯基的方法和后来其他人的改进难于实现，但它对后来的影响是巨大的，此后数学逻辑的发展和完善为机器证明定理提供了一种强有力的描述语言。50年代中期，美国开始了利用计算机证明数学定理的尝试。塔斯基的工作具有异乎寻常的影响，以后柯亨（Cohen, 1934～）、王浩及吴文俊等人的工作都

深受他的影响

机器证明史上第一项奠基性的突破，是由美国的卡尔基大学——兰德公司协作组作出的。1956年，此协作组的纽厄尔(A.Newell)、西蒙(H.Simon)和肖乌等人通过研究证明定理的心理过程，建立了机器证明的启发式搜索法，编制了一个"逻辑理论机"程序(LT)，成功证明了罗素和怀特海所著的《数学原理》第二章52条定理中的38条，这一年可作为历史上计算机证明以至于人工智能研究的开端。1963年，他们又在计算机上证明了全部52条定理。50年代末，著名美籍华人、数理逻辑学家美国洛克菲勒大学的王浩教授发明了王浩算法，把机器证明规则化，1959年他只用9分钟的机器时间，用计算机证明了《数学原理》中的一阶逻辑部分的全部350多条定理，在当时数学与数理逻辑界引起轰动。

70年代，机器证明得到新的重大进展。1976年美国伊利诺斯大学的阿佩尔(K.Appel)、哈肯(W.Haken)和科奇(J.Koch)完成了构造可约构形的不可避免集的工作，在电子计算机上解决了100多年来传统人脑支配手工操作所长期未能解决的著名难题——"四色猜想"问题。

随着研究的进一步深入，今天人们已经能根据机械化方法编制程序，在计算机上给出了证明。例如，人们利用国产长城203台式计算机，就可以证明并不简单的西姆森(Simson)定理：从圆周上任一点，向圆内接三角形的三条边引垂线，则三垂线在一条直线上。随着机器证明研究的不断开展，人们已经证明了奠基于各种公理系统的各种初等几何(初等，这里指不涉及二阶谓词演算，只须相当于乘法交换律)的这些公理，大都可以机械化。从理论上讲，这些几何的定理可以借助计算机来实施其证明。可以机械化的几何包括：欧氏几何、有序投影几何、无序投影几何、鲍利亚-罗巴切夫斯基非欧几何、黎曼非欧几何、墨比乌斯圆几何等等。在短短几年内，人们便在初等几何中的一些主要定理的证明上实现了机械化，不仅如此，人们还证明了微分几何中的一些主要定理可以

机械化。近来又对三角函数、双曲函数等一类超越函数公式实现了机械化的证明。此外，在分析拓扑学、集合论以及递归函数等方面都使机器证明获得了成功的应用。因此，可以预料，随着计算机愈来愈小型化而内存又愈来愈大，以及机器证明理论研究的不断深入，将会开辟机器证明的新时代。

机器证明在理论上和实践上的成果，为今日的数学教育开辟了一个全新的领域。一方面，传统的数学内容有相当部分可以在计算机上得到实现，它将使数学教育的内容作相应的调整；另一方面，数学作为其他教育的基础，应当如何发挥其作用呢？还有，作为训练人的智力的欧氏几何，其证明过程可以用机器来完成，那么，数学在训练人的智能方面的功能将如何实现呢？诸类问题，都值得我们认真思考。我们认为，机器证明对于数学在教育中的作用不是削弱了，而是加强了。在这方面，人机对话方式是发挥机器证明效能的较好方式。

应该看到，机器证明不能解决所有的问题。实际上，它绝大部分的证明都是人们已经知道的结果。“四色问题”是它证明的第一个未被人证明的结果，但是，人们后来陆续发现其过程中有不少错误。虽然，它的设计者宣称，这些错误“无关宏旨”，并且已就发现的错误进行了修正。近些年来，不断有人对它的证明程序进行了简化，因此证明的正确性日益为数学界所接受。

五、吴文俊对数学机械化的重大贡献

我国以吴文俊院士为首的数学家在机器证明研究上取得了令世人瞩目的重大成果，为数学机械化的发展做出了突出贡献。

吴文俊院士认为，如果考察一下数千年的数学发展史，可以发现，数学多次重大突破都与数学的机械化有关，算术中有许多四则难题，每题求解都要煞费苦心。但代数出现以后，许多问题一列方程，其过程就成为机械性的了，变得轻而易举。欧氏几何富丽的证明，需要添加各种辅助线及其他一些很高超的技巧，但解析几何却使得有些定理的证明成为机械过程了。微积分使得求面积、体积、

曲面切线、极值等问题已成为机械的求导数、求积分了。

基于对中国古代数学机械化的深刻理解和认识，吴文俊自觉地继承和发展了中国古代数学机械化的思想和方法。吴文俊先生在对中国古算深入研究的基础上，分析了笛卡儿的思想，深入探讨希尔伯特《几何基础》一书中隐藏的构造性思想，开拓了机械化数学的崭新领域，创立了数学机械化方法：从几何公理体系出发，引进坐标，将任意几何问题代数化——将证明题的假设与结论分别表示成多元多项式方程——在电子计算机上运算，以判定定理是否成立。吴文俊提出了平面几何及微分几何的判定法，在机器上证明了人难以证明的问题。自 1976 年冬开始研究，1977 年取得了初步结果，证明了初等几何主要一类定理的证明可以机械化。其证明方法分为三个主要步骤：

第一步，从几何的公理系统出发，引进数系统与坐标系统，使任意几何定理的证明问题成为纯代数问题。

第二步，将几何定理假设部分的代数关系式进行整理，然后依据确定步骤验证定理终结部分的代数关系是否可以从假设部分已整理成序的代数关系式中推出。

第三步，依据第二步中的确定步骤编成程序，并在计算机上实施，以得出定理是否成立的最后结论。

实际上，吴文俊给出了实现机器证明的一个行之有效的一般方法，其方法被称为“吴文俊消法”或“吴方法”。可以说，这是吴文俊对中国传统数学的构造性和机械化的思想及几何代数化方法应用的结果。首先，遵循机械化思想引进数系、建立坐标系，把几何构图中的各种关系利用代数方程来描述。将数学定理的假设条件表示为一组代数方程

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{H}$$

而数学定理的结论由代数方程

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (C)$$

所刻画，这里 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 和 g 都是变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式，那么定理的机械化证明就可归结为如下的机械化问题：构造并提供一种确定的、机械的算法，使得此算法进行有限步之后即可判定：在若干附加条件下，结论 C 是否可由假设 H 推出，即是否可由 $f_1=0, f_2=0, \cdots, f_r=0$ 推出 $g=0$。

数学定理机械化证明的吴氏定理圆满地解答了这一机械化问题。这给 2000 多年的公理化演绎体系带来了强烈的冲击，终于实现了千百年来几何定理机械化证明的梦想。

吴方法是以宋元时期传统数学"天元术"、"四元术"为基础创造发展起来的。吴文俊解释并发展朱世杰《四元玉鉴》中的解高次联立代数方程组的有效解法，成为机械化证明的代数基础。吴原理提供了高次联立方程组的有效解法。该法是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的坐标消去，如果消去的结果为零，即定理得证，否则再做进一步检查，此步骤用多项式的消元法来验证。该法就解多元多项式的方程组而言，是当今世界上惟一能包括一般情形的完整算法。吴文俊运用自己的方法，在电子计算机上完成了西姆森线、费尔巴哈定理、毛莱定理等一系列初等几何的证明，许多定理的证明只需几秒甚至零点几秒就可以在电子计算机上完成，而一些定理的证明相当繁杂，即使交给杰出的数学家来证，也是相当困难的。自 1976 年以来，周咸青用"吴方法"已成功地证明了 600 多条定理，以吴氏定理为基础，机器证明定理的范围又被推广到非欧几何、仿射几何、圆几何、线几何、球几何等等领域。1978 年，又证明初等微分几何中的一些主要定理可以机械化，这样走出了一条完全是中国人自己开拓的新道路。到 80 年代，吴文俊不仅建立起数学机械化证明的基础，而且扩张成广泛的数学机械化纲领，吴方法已在数理科学、理论物理和计算机科学等基础科学领域成功地解决了一系列理论和实际问题。比如，吴文俊运用自己的方法，证明了可以用计算机程序从开普勒定律来推导出牛顿定律，这已超出了数学机械化证明的范畴，属于更广的自

动推理。其实，各个学科领域研究的问题，只要涉及方程求解，吴方法都会有用武之地。

六、数学机械化的现代进展

近年来，对于中国数学史的研究以及定理机器证明的数学机械化纲领正在急剧地扩大影响，真正成为一个独具中国特色的结构性的、可机械化的数学运动。

1983年，在美国科罗拉多州举行的全美定理机器证明学术会议上，周咸青提交的论文"用吴方法证明几何定理"在国际自动推理领域科学家中引起了轰动，吴文俊的工作为国际数学界所知晓。就几何定理机器证明而言，吴方法的基本框架是首先采用代数方法，引进坐标，将几何定理的叙述用代数方程的形式重新表达；接着，对代数方程的求解，提出一整套完整可行的符号消元解法。因此，吴方法包含几何问题的代数化和代数方程的消元解法两个步骤。吴文俊说"它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承"，虽然其间有许多发展和创新。

从1984年开始，吴文俊应邀前往欧美一些国家的研究机构和大学做学术报告和讲学。1986年他在美国阿格纽国家实验室发现他们正在为用计算机从开普勒定律推导牛顿定律而一筹莫展，吴文俊用他自己的计算机程序，成功地完成了这一自动推导工作。自动推理的许多第一流专家，如沃斯、博耶都对此给予了极高的评价。1988年，国际学术刊物《人工智能》杂志发行特辑，介绍吴文俊的工作和吴方法的一些应用成果，与数学机械化密切相关的符号计算国际会议，也增设专题，进行吴方法的学术交流。

1989年，吴文俊通过将其方法应用到不等式证明，从而提出了求解非线性规划问题。同年，吴文俊又成功地将其方法用于机器人设计中逆运动方程求解问题，并给出了普马型机器人的逆运动方程的解。

1990年，吴文俊获得国家科委的特别资助，在中国科学院系统科学研究所成立了以他为首的数学机械化中心，明确以开展方

程求解和定理证明的机械化为研究方向。8月8日,以吴文俊为首的"数学机械化中心"正式成立。在吴文俊的总纲领下,他的同事及学生吴文达、石赫、刘卓军、王东明、胡森、高小山、李子明、王定康等在方程求解与数学机械化应用方面已得出一系列理论及实际应用的结果,如多元多项因子分解及极限环问题等。吴文俊在数学机械化方面的各项独创性工作使他在国际、国内产生广泛的影响,享有很高的声誉,单是定理机器证明就已获得许多热情的赞扬。美国《自动推理》杂志编委J.S.穆尔(Moore)认为,在吴文俊的工作之前,机械化的几何定理证明处于黑暗时期,而吴文俊的工作给整个领域带来光明。美国定理自动证明的权威人士L.沃斯(Wos)认为吴文俊的证明路线是处理几何问题的最强有力的方法。吴文俊在自动推理领域的杰出贡献是不可磨灭的,他理应获得最高奖。

1992年,以吴文俊为首席科学家的国家攀登计划项目"机器证明及其应用"正式立项,由来自中科院的6个研究所、9所大学和北京市计算中心的包括基础数学、应用数学、计算数学、计算机科学、理论物理、高技术等研究领域的学者32人(其中包括中科院院士3人)承担此项目。根据总体计划,本项目设置7个子课题,这些子课题之间有着紧密的联系。该项目执行5年以来,在大范围内取得了许多突出成绩,超出了预计的目标,各子课题所取得的主要进展有:①机器证明的理论与算法;②代数系统求解的理论与算法;③在理论物理中的应用;④在计算机科学中的应用;⑤在数学学科中的应用;⑥在机器人机构学中的应用;⑦吴方法的软件系统实现。这7个子课题,在大范围内取得突出成绩,超出了预计的目标。

1995年8月,吴文俊在北京主持了第一届亚洲计算机数学研讨会,交流数学机械化研究的经验,使有别于西方而具有中国特色也就是东方特色的机械化数学研究在更大的范围内开展。吴文俊的心愿是:中国传统数学濒于失传并让位于西方现代数学,已有几个世纪之久了,现在已到了复兴中国数学事业的紧要关头,下个世

纪,应该让中国先哲创立的机械化算法体系在数学领域再领风骚。“继续发扬中国古代传统数学的机械化特色,对数学各个不同领域探索实现机械化的途径,建立机械化的数学,则是本世纪以至可能绵亘整个21世纪才能大体趋于完善的事”①;但是,“我们的目标是明确的,即是推行数学的机械化,使作为中国数学传统的机械化思想,光芒普照于整个数学的各个角落”,“复兴而不仅是振兴中国数学,使自秦汉迄宋元傲居世界舞台中央的中国数学重展昔日雄风于今日,应该是完全可能的”②。2000年,吴文俊获首届国家科学技术最高奖。

综合以上对数学机械化史的考察分析,我们可以得出以下三点结论:第一,数学机械化思想来源于中国古算,并从笛卡儿著作中找到根据,其产生和发展经历了从笛卡儿、莱布尼茨等数学家、哲学家的思想奠基,到希尔伯特定理证明机械化思想从理论上的明确提出,再到定理的机器证明等几个重要的发展阶段。数学机械化走出了一条从公理化出发,通过代数化以达到机械化的道路。第二,数学机械化过程反映出计算和证明这两种基本的数学方法的统一趋势,这是数学家孜孜以求的目标。“在电子计算机广泛应用后形成的现代理论计算机科学看来,任何数学证明,都不过是一种非确定性的计算。”③ 在机器证明中,证明和计算完全结合起来了。能够做到这点则说明了二者本质上的一致性。第三,数学机械化思想从产生到发展的每一阶段,都是建立在对数学更为深刻认识和理解基础上的概念、方法或理论上突破,对此,中外数学家包括数学大师们各自做出了贡献,但直到吴文俊机械化定理的创立,才为数学的机械化奠定了坚实的基础,致使数学研究的面貌改观。而吴文俊定理植根于中国传统数学这片沃土,从《九章算术》、《四元玉鉴》到吴文俊《几何定理机器证明的基本原理》(1984),中

---

① 吴文俊,吴文俊文集,山东教育出版社,第329页,1986年。
② 吴文俊,现代数学新进展序,安徽科学技术出版社,第10页,1988年
③ 洪加威,理论计算机科学的一些问题,自然杂志,1985(2)。

国数学机械化的思想脉络清晰可见。随着人们对吴方法、吴原理的认识日益加深，随着吴定理的应用更为广泛，随着其影响逐步扩展，吴的方法和原理越来越受到国际数学界的高度评价。然而，数学机械化的道路毕竟是漫长而艰辛的，建立具有中国特色的机械化数学体系依然任重而道远，这有待于致力于此的人们共同努力。

第3章　中国传统数学机械化思想的基础

中国传统数学机械化思想是筹算操作本身所具有的机械重复运演形成的一种数学思想方法。中国传统数学以解决问题为主旨，注重计算、以算法为中心的特点，决定其数学成果表现为算法的形式，而以筹为算具和数学问题的模式化，便带来了计算方法程序化与机械化的特点。如果把中国古代数学与现代的计算机技术相比，则可以认为古代算筹相当于现代电子计算机，是一种“硬件”，而算法（古算书中的“术”）即是一种“软件”，可以比做计算机的程序设计。中国传统数学对于算具长期的依赖性和由之形成相应的一整套程序化算法的特点，为我国筹算数学的机械化奠定了牢固基础，中国传统数学的算法化倾向以及算筹的不断改进、完善，又促使机械化水平的提高和计算技术的长期发达。

3.1　中国传统数学机械化的“硬件系统”

一、算筹是中国传统数学机械化的物质基础

原则上说，中国传统数学是随着算筹的产生而形成和发展起来的。中国传统数学算法化的内容与机械化方法都是利用算筹进行计算的，对算筹有明显的依赖性，基本上可以看做是一个机械化方法的计算系统。“算筹算盘，即是当时施用的没有存储设备的简易计算机。”[1] 在计算过程中，计算工具占有重要的有时甚至是举足轻重的地位。算筹作为中国古代特有的计算工具，不仅提供了数学活动的舞台，而且为中国传统数学算法机械化提供了物质

[1] 吴文俊，从《数书九章》看中国传统数学的构造性和机械化特色，见《秦九韶与数书九章》，北京师范大学出版社，第75页，1987年

基础。

世界上没有哪一个国家像中国一样，在长达2000余年的时间内，始终如一地借助于算筹这一具体的计算工具来从事数学活动。我国古代，数学称为算术。"算"字有一个同音字"筭"，《说文解字》上说："筭，长六寸，计历数者。从竹从弄，言常弄乃不误也。"可见，筭即是计算工具算筹；而《说文解字》上说："算，数也，从竹从具，读若筭。"可知算是用算筹摆成的数。这恰当概括了中国古代数学使用算器，以算为主的特点，以至于可以把中国古算法称为"筹算"。算术一词最早见于《周髀算经》卷上。《汉书·律历志》在论述了数的功用之后说："其法在算术。"可见算术即是用以处理实际问题的计算方法，算术后来又称为算学、算法或数学。从计算技术和方法的角度来说，我国基本上没采用西方那样的笔算，数学从一开始就和算筹的使用联系在一起。

算筹在中国起源甚早，《老子》(春秋战国之际成书)中就有"善数者不用筹策"的记述，可见当时算筹已作为专门的计算工具而被普遍采用，筹的用法已趋于成熟。现在，人们一般认为，公元前5世纪算筹在中国已得到普遍应用。算筹记数的方法，现在所见的最早记载是《孙子算经》，由算筹记数得到的筹算记数法是一种相当完善的十进位值制记数法，中国古人由此独立地得到"零"和"零号"。筹算在中国古代数学中占有极其重要的地位，多数数学著作的主要内容就是利用筹算解决某类问题的算法，从《九章算术》起，算法("术")作为主要内容就成为中国古代数学的一大特点。从这种意义上说，中国古代数学可以说是在筹算基础上发展起来的。

算筹是当时世界上最灵巧的计算工具，使用起来既简便又准确，随着计算愈益复杂，人们不断改进算筹使之由长变短，截面由圆变方，更趋方便。例如，公元3世纪刘徽使用不同颜色的算筹表示正负数，红筹表正数，黑筹表负数；特别是求解高次方程、求解同余式组和高次方程组的研究不断深入，促进了筹算的摆法不断发展，不仅能摆出四则运算、乘方、开方等代数运算，而且包含了特定筹式的演算：不同的位置用来表示特定的数学意义，如比例中不同

的项、不同的未知数、未知数的不同次数等，布列算筹的方法日趋巧妙，解决了一系列重要的数学问题。

从根本上说，算筹表现的数学形式是"位置模式"，这是中国传统数学赖以发展的基础。算筹在算板上可以根据需要随意摆弄，按不同的排列形成筹式，筹码不同的位就表示不同的值，算筹表数就依据布位的原理。算筹的使用加速了十进位置值制记数法的完成，虽无零的符号，但用空位表示零，这种记数法非常有利于四则运算，加之汉语数字都是单音节，为算法改进（如乘除捷算法和口诀的产生）并进而促进计算工具的改革提供了有利条件，这对后来中国数学长于计算，对提高数学的机械化水平起了重大作用。中国数学能够在数值计算方面居于世界前列，与算筹采用的十进位置制记数法密切相关。

算筹及其十进位值记数法都是我国的创造发明。在计算机发明以前，我国古代计算技术借助于算器达到相当高的水平。算筹是数学模型化、算法化、机械化发展的重要内在因素。

(1) 算筹记数。用算筹的不同位置和不同摆法表示，严格遵循十进位置值记数法。

(2) 算筹表示分数。

(3) 算筹表示小数。

(4) 算筹表示正、负数。这是为解"方程"这种机械化算法畅通无阻的需要而产生的。

(5) 算筹位置表示一个方程各项的系数，这是传统算筹位置的新发展。

(6) 算筹位置表示一方程组各方程的系数，这是算筹位置的又一新发展。

(7) 算筹表示多元高次方程的系数。

(8) 算筹表示级数与高阶级数。

二、中国古代优越的记数法和计算工具为数学机械化提供了得天独厚的条件

算筹作为先进的计算工具在固定的算板上依布位原理进行的位置变换，便是展开数学机械化活动的基础。算筹的最大优越性是为数学家提供了应用分离系数法的途径，从而使一些数学关系的表达和有关的运算大大简化，即使复杂的数学关系（如一般的多元线性方程组、二元、三元或四元高次方程等等），用算筹都可巧妙表达。

首先，由于算筹固有的位置模式和变换原理，决定其内容侧重于算术以及与数字有关的代数方程及其求解，而非逻辑关系和几何性质，即使是几何问题，也要化为数值计算，而几乎不考虑离开数量关系的图形的性质。

其次，数学机械化方法就是利用算筹进行计算的，因而对算筹有明显的依赖性。算筹的作用不限于单纯的数值计算，更重要的是利用筹在算板上各种相对位置排列成特定的数字模式，用以描述某种类型的应用问题，而这种数字模式，都是按一定的规则、一定的方向进行的，并规定相应的演算程序。中国古代虽没有使用符号的习惯，但筹式这一特定的数字模式把量的意义通过算筹放在算板上的位置表达出来，并进一步把运算由“数”扩展到“式”，起到了形式化数学语言的作用。因此，筹式可视作具有内在结构的数学符号，它不仅能够合理表达思想内容，而且能够精确表达概念、方法和逻辑关系，这就使得中国数学机械化思想首先集中两个方面：一是用以描述某种类型的实际应用问题，规定题中量放在算板上的适当位置；二是制定算法，决定放置在算板上算筹进行布列变换的步骤。算法即“术”，每一个算法实质上就是一个运算规则，适于在算板上操作、运演。

再次，筹算过程具有一定的“机械化”特征。筹算应是一个由一系列算法所构成的数学体系，其核心是十进位值制和分离系数法。筹算过程即是对算筹的布列和运算过程，中国古代筹算以筹

式布式,依术推演,程序步骤明显,由于使用算器,无须保留运算的中间过程,筹算所要求的每类问题的有关数据都是按一定规则排列成特定的模式,并规定了一套程序化的算法,这种算法的模式化和程序化,使得筹算过程具有算法机械化的特点,只要步步按规则运筹,就能机械地得出结果来。例如古代中算家为了解决现今所谓线性方程组一类的问题,便将有关数据按一定的规则排列成筹码方阵,称之为"方程",并规定了一套以遍乘、直除(累减)为基本变换的类似于现在所说的"初等变换"的算法。利用算筹按算法进行布列、运筹就能顺利地机械地得出结果,这是筹算过程的一大特点。中国古代数学中许多具有明显机械化特点的脍炙人口的成果,诸如分数、负数、小数的概念及表达、开平方和开高次方、解线性方程组和高次方程(组)、最大公约数和最小公倍数的算法、计算圆周率、解一次同余式组以及造高阶差分表等等,都得利于算筹体系的采用。同时,各种运算过程中的数量关系都是用筹的位置关系来表示,因而在古代数学著作中,都不列数学运算符号(如加减乘除符号),这也是中国古代数学中长期没有产生这些符号的一个原因。

综上所述,从数学自身来说,由于算筹所提供的十进位置值制记数法和筹式所具有的代数意义,为中国传统数学机械化提供了基础条件,也使中国数学长期在算术和代数两大领域遥遥领先于世界。因此,对中国数学性质和思想方法的理解和认识不能离开筹算这一特定的内容。

3.2 中国传统数学机械化的"软件系统"

算筹作为整个中国古代数学计算系统的"硬件",为实现数学机械化提供了优越的条件和物质基础,中国古算以算为主的特点和长期使用算筹、珠算,自然就会形成一个与"硬件"相对应的"软件"。"中国传统数学中的'软件'思想非常突出,可以说这种'软

件'主要是配合和适应'硬件'的前提下发展起来的"[1]。而实现机械化的关键在于确定计算过程即从最初的计算对象(数据)导出所要求结果的准确的方法序列,这就是算法,中国古代的算术乃"算数之术",算法或"术",可以被看做中国古代数学计算系统的"软件"。每一个算法,实质上就是一组运筹的规则,计算过程就是一系列由规则指定的运算构成的,由于算法一般具有机械化的特征,只要按步步规则操作,就能在有限步骤内得出结果,解决问题。

一、制定算法,是数学的根本,是中华民族实用价值观在数学中的表现

中华民族实用价值观是古人经纶天下、治国济民作为理想奋斗目标的反映。社会实践是产生和发展社会思想的基础,是各门科学发展的动力,数学也不例外。这种价值观主张以社会实践作为衡量数学的标准,促使人们把数学与社会实践紧密结合,并把数学应用于社会生产、生活的各个领域。

中国传统数学的研究遵循着一种程序化的思想,这种思想从《九章算术》开始一直是中国古代数学著作大都沿袭的模式:

实际问题→归类→筹式模型化→程序化算法

即将社会和实际生产、生活中的问题,先编成应用问题,按问题性质分类,然后概括地近似地表述出一种数学模型,借助于算筹,得到这一类问题的一般解法——术,再把算法综合起来,得到一般原理,分别隶属于各章,人们按照书中的方法、原理和实例来解决各种实际问题。中国传统数学遵循这种程序化的思想研究问题,这与西方传统数学按照一种以逻辑演绎思想为指导的"定义—公理—定理"的程序去构造演绎体系,两者之间有明显的区别。与中国数学研究的传统相适应,我国筹算形式下数的理论是以确定算法为基本内容,又以创造和改进算法为它的发展方向。因此,制定

---

[1] 李迪,中国传统数学的程序性,第三届国际科技史研讨会论文,1983年(香港)

算法是数学的根本，是中国数学赖以存在和发展的基础，这也可以说是中华民族的实用价值观在数学上的表现。在这种价值观念的支配下，中国古代数学家在筹算模式范围内，创造发明一种又一种筹算技术，用于描述和解决现实中常见的数学问题，例如，约分、合分、减分、乘分、经分、今有、齐同、衰分等诸算法用于处理分数和常用的比例问题，盈不足术用来处理盈亏问题，"方程"术用于处理线性方程组问题，开方术、天元术、四元诸术刻画了开方和解高次方程(组)的问题，大衍求一术则解决了同余式的求解问题，招差术用于对日、月天体经行度的推算，等等。整个中国古代数学确实可以看做是以算法作为软件的计算系统，为了使全部计算首尾连贯、有条不紊地进行，必须对每种模式编一套完整的演算程序，古算书中的"术"实际上是解题公式的逐步演算程序，是用一套"程序语言"来描述的程序化算法。各种不同的筹算方式都有基本的变换法则和固定的演算程序。中算家还善于运用演算的对称性、循环性等特点，将演算程序设计得十分简捷、巧妙。开方术、割圆术、增乘开方法、大衍求一术等在筹算程序的设计方面都达到很高的水平。这正说明中算家十分重视对一个科学算法的要求，这些"术"即使以现代的"算法"观念来考察，也是一个个合格的算法，一般具有前文所提到的四个特点即：确定性、可预见性、普适性和具体性。

对于这样一些能行且可计算的"术"，按照它规定的步骤，任何人利用算筹（或利用笔算）都能求出解来，对于现代计算工具——电子计算机来说，我们可以把它们译成算法语言，实施现代的可计算的算法。

二、变换技术和改进算法是数学机械化思想的核心内容

中国古代数学家们设计的程序，当然是适用于他们的计算工具——算筹的一种"软件"。中国古代算法常常利用筹在算板上的相对位置关系，并规定相应的演算程序，通过筹式的逐步变换而最终机械化地获得问题的解答。如果不排成固定的模式并规定相应的演算程序，必然会在繁琐、复杂的演算中乱套，更不便于普及和

应用，因此，机械化程序的创设和计算技术的提高成了数学思想的核心内容。筹式模型化和程序化标志着古代筹算的完备与成熟，正是这种模式化和程序化的要求，成为中国古代数学建立复杂的算法理论、提高计算水平的基础条件，而设计和改进算法也自然成为中算家孜孜以求的目标。中算家的筹式程序化算法的设计能力，早在《九章算术》中就有了出色的表现，后经历代算家所继承、改进并不断发展，到宋元时期，其抽象性和一般化水平更高，比如秦九韶关于大衍总数术的设计，在算法上有很高的成就，其化约元数为定数的方法在没有素数概念的历史条件下是难能可贵的[1]。而以奇、定二数求乘率的循环递推程序（即大衍求一术）设计科学而严谨，至今无可指摘。刘徽创立的"割圆术"中求圆周率的方法是一种典型的循环算法过程。"招差术"、"正负开方术"等许多算法的程序都符合现代算法的要求，具有机械化、一般性和有效性。有些算法（术）的筹算程序可翻译成现代算法语言，按照计算机程序输入计算机进行运算。为了确认算法的合理性和正确性，中国数学也需要采取证明，使用逻辑推理。许多重要的数学原理与精湛的数学思想都是通过后人的注释使算理得到简要的阐发或证明。中国古代的数学从先秦的九数到《九章算术》的形成，是以归纳逻辑为主的过程，这个过程甚至一直延续到刘徽之前；刘徽《九章算术注》的出现，完成了对《九章算术》及他本人提出的公式、解法的证明，则以演绎逻辑为主[2]。但是，这并不是像古希腊数学那样，已经形成或在实际上形成了演绎体系，处于数学的主体地位。中国数学理论体系的建立、许多著述的编撰以"术"为思考的基点，以"术"带题，算理结合，形成一套发达的以计算为中心的应用位置模式的算法理论系统，其成果的表现形式是算法及为说明算法和发展算法而设计的几何构图，推进方式是以推广旧算法、发展新算

---

[1] 李文林、袁向东，中国古代不定分析若干问题探讨，科技史文集，第8辑，上海科学技术出版社，1982年

[2] 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科技出版社，第330页，1992年

法为主、具有较强的目的性。这套理论不仅适应于中国当时社会的需要，而且在不同的历史时期为世界其他国家提供了启示、借鉴和样板，丰富了世界数学的宝库。

第4章　经典《九章算术》中的数学机械化思想

吴文俊在《〈九章算术〉及其刘徽注研究》的序言中写道："我国传统数学在从问题出发以解决问题为主旨的发展过程中建立了以构造性和机械化为其特色的算法体系……《九章算术》与《刘注》是这一机械化体系的代表作……《九章》与《刘注》所贯穿的机械化思想，不仅曾经深刻影响了数学的历史进程，而且对数学的现状也正在发扬它日益显著的影响。它在进入21世纪后在数学中的地位，几乎可以预卜。"

《九章算术》建立了以解题为中心的机械化算法体系，《九章》成书之时，古希腊数学已越过其巅峰，走向衰替。《九章》的出现，标志着世界数学研究中心从古希腊及其殖民地转移到了华夏大地，也标志着以算法研究为主体的数学取代了以几何研究为主体的数学，从此算法研究占据了世界数学舞台的中心[①]。《九章》较完整地体现了中国数学思想及其特征，以算为主，数学成果表现为算法的形式，而以筹为算具的筹式演算和数学问题的模式化，便带来了计算方法程序化和机械化的特点。全书含90余条抽象性"术"文即解法或公式，246个例题，每一"术"几乎都是用一套"程序语言"所描写的程序化算法。约分术、今有术、盈不足术、方程术等等，这些术虽然繁简不一，但其实质都是一套机械化的计算程序，几乎可以照搬到现代计算机上去。《九章》中"以盈不足术入之"、"以正负术入之"、"如方程"等术，即相当于调出盈不足、正负、"方程"等程序进行运算的指令，《九章》中的机械化思想方法集中体现在其中，其许多成就居于世界领先地位，奠定了此后中国数学

① 郭书春，中国科学技术典籍通汇·数学卷叙，河南教育出版社，1993年。

千余年的基础。

4.1 分数运算法则中的机械化程序

在数学史上，人们认识分数比认识小数要早得多，中华民族是世界上使用分数最早的民族之一。我国先秦典籍和《周髀算经》中已有大量分数运算的记载。《九章算术》集其大成，在世界上第一次建立了完整的分数理论。

一、约分与最大公约算法

《九章算术》方田章提出了各种分数的运算法则，首先是约分术。约分是化简分数，而不改变分数的值。刘徽说：

> 设有四分之二者，繁而言之，亦可为八分之四，约而言之，则二分之一也，虽则异辞，至于为数，亦同归尔。

这表明，中算家的约分术，首先还是注意观察公约数而约简之，只是中算书中列出的观察公因子的方法不多，《张丘建算经》和《夏侯阳算经》又有了丰富和发展。

中算家无质因数的概念和算法，故没采取将整数分解成质因数约分，而是采用"更相减损"这样一套机械化的算法，求等数相约。

《九章算术》方田章第五、六问先给出约简的例子，然后给出了"约分术"。按《九章》的约分程序，分数约分实为三个步骤（为说明程序化步骤，术文前的序号均为笔者所加，后文同此。）：

(1)"可半者半之"：即进行观察，若分子、分母都是偶数，可先取其半；

(2)"不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也"，直至求出"等数"；

(3)"以等数约之。"

其中第(2)步"以少减多，更相减损"是约分之关键，又是典型的机械化程序，若用现代语言翻译其程序即为：设要约简的分数为

$b \neq a$、$b<a$，则依次从 a 中减去 b，若减 q_1 次（$q_1 \geq 1$）后得余数 $r_1<b$（$r_1=a-bq_1$），则再从 b 中依次减去 r_1，若减 q_2（$q_2 \geq 1$）次后余数 $r_2<r_1$，（$r_2=b-r_1q_2$），则再从 r_1 中减去 r_2…… 如此更相减损，步步重复按规则机械化操作，直至 $r_{n-1}=r_n$，得到等数，即为 a、b 的最大公约数。

用更相减损术，上面第六问中求最大公约数的程序是：

```
5      REM G.C.D
10     REM MUTUAL SUBTRAOTION ALBORITHM
20     INPUT A,B
30     IF A<B THEN 70
40      A=A-B
50     IF A=0 THEN 90
60.    GOTO 30
70      C=A:A=B:B=C
80      GOTO 30
90      PRINT B
RUM
? 49,91
7
```

由此看来，中国古算约分术即求等数的方法，其实质是术文中的更相减损过程，由于此过程终可在有限步骤内实现，故它是一种构造性方法。其构造性原理在于：等数犹如量之最大公度，分子、分母皆为其整数倍，因而每一辗转相减所得余数也为其整数倍。余数随计算过程减而损之，因而进行有限步后必然得到等数。如刘徽注所说："其所以相减者，皆等数之重叠，故以等数约之。"

此"更相减损求等"法与欧几里得《几何原本》第七卷第二题求最大公约数法基本一致。以《九章算术》方田章第六问约简为例，用现代形式写出两种方法程序分别如下：

[49,91] → [49,42]
[7,42] → [7,35]
→…… → [7,7]

更相减损求等法

	91	49	1
	49	42	
1	42	7	6
	42		
	0		

辗转相除法

显然，除最后一步外，两种方法程序完全对应。欧几里得在这个问题中引入了许多概念，给出了冗长的逻辑证明。尽管如此，他还是暗用了一条未加说明的公理，即如果 a，b 都被 c 整除，则 $a-mb$ 也能被 c 整除；中国筹算所采用的"更相减损"方法，实际上也暗用了一条未加说明的公理，即若 $a-b$ 可以被 c 整除，则 a，b 能被 c 整除。但二者的差异在于：古希腊数学把不证自明的公理放在逻辑演绎的前提条件中，追求的是逻辑的构造；中国古代数学则是把公认的事实作为一种不言自明的公理，运用到筹算操作的每一步骤之中，追求的是筹算运演的机械性构造。目前算术教科书中的辗转相除法便是从更相减损术发展起来的。

正因为约分术是利用筹算进行演算的机械化算法，可以将其译为多种现代计算机算法语言，通过计算机来计算。下面是对一般的约分术原理所设的 BASIC 语言程序：

```
10    HOME
20    PRINT "ENTER TWO INTEGER:"
30    INPUT "X1 = ";X1
40    INPUT "X2 = ";X2
45    IF X1 = X2 THEN 80
50    IF X1<2 THEN 80
60    A = X1:B = X2
70    GOTO 90
80    A = X2:B   X1
90    Q = 0
100   Q   Q + 1
```

```
110      IF  A-Q*B>B     THEN  GOTO 100
120      IF  A-Q*B=0     THEN  GOTO 150
130      T=A:A=B:B=T-Q*B
140      GOTO 90
150      PRINT
152      PRINT " ";
155      PRINT "(";X1;",";X2;")=";B
160      END
```

二、通分算法程序

《九章算术》方田章中的合分、减分两术中均用到通分，以"母相乘为法"，即以分母的乘积为公分母，这样的公分母一般并不是原诸分母的最小公倍数。关于通分，刘徽在合分术注中说："乘而散之，所以通之。通之则可并也。"通分根据的是分数变形规则"乘而散之"，包括"母同"和"子齐"两个方面。"凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。"少广章前 11 个题可归结为：已知一亩之田，其广为 $1+1/2+1/3+\cdots+1/n$ 步，求田之长（n 依次取 2，3，…，12）。以少广章第 7 题为例，少广术文推演的算法程序是：

	全步							最下
(1)置全步及分、母子，	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
(2)以最下分母遍乘诸	8	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	1
分子及全步，	8	4	8/3	2	8/5	8/6	8/7	1
(3)各以其母除其子……，	56	28	56/3	14	56/5	56/6	8	7
(4)又以分母遍乘诸								
分子及已通者，	168	84	56	42	168/5	28	24	21
(5)皆通而同之．	840	420	280	210	168	140	120	105

由于反复实施"以分母遍乘诸分子及已通者"和"各以其母除

其子"的程序，运用这种机械化方法逐个去分母而"通之"，这样在有限步骤内"皆通而同之"，即是说，将所有分数通分为同分母840。不难理解，如果采取将每次乘积化为既约分数的措施，这样所得全步之积实际上就是诸分母之最小公倍数。郭书春先生认为，约分术文中并没有"可约者约之"的规定，因而少广术并不必然地求出最小公倍数。少广章大多数题中之所以求得最小公倍数，或因无需可约者，或因有可约者，不自觉地约之。按此观点，本题所求得的最小公倍数840，是由于在实施"以最下分母遍乘诸分子及全部"后，将8/6不自觉地约为4/3而致。

4.2 "方程"之模型构造及演算程序

筹算理论以"率"为纲，"方程"术进一步演算程序化，不仅使我国古代筹算制度达到完善的水平，而且标志着古代算法理论在数学问题模式和解法程序化方面达到了一个更高的水平。

一、对"方程"模型及其解之构造

"方程"的本义，就是"并而程之"。细言之，即把诸物之间的各数量关系并列起来，考核其度量标准。方程这一数学模型及其解之构造可见于刘徽对"方程"概念之精辟界说："程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程。行之左右无所同存，且为有所据而言耳。"按照刘徽的注释，"方程"即为按照一定的规程进行试验考核而得到的数字模式。每做一次抽样试验就叫"程"，将结果记录在筹算板上，排成由上到下的数码竖行，有几物便有几行，即"皆如物数程之"。这样，就把各"程"中的各物及总实的数码按行列排列整齐，从右向左

n 程		2 程	1 程	
a_{n1}	$\cdots$	a_{21}	a_{11}	物 1
a_{n2}	$\cdots$	a_{22}	a_{12}	物 2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{nn}	$\cdots$	a_{2n}	a_{1n}	物 n
b_n	$\cdots$	b_2	b_1	实

布列为一个筹码方阵，如图(这里用字母代替古代筹码)。正负数引入后，刘徽正负术注云："故赤黑相杂足以定上下之程。""方程"中各位之数可正可负，"自有赤黑相取"，扩大了"方程"应用范围。

这种筹算以分离系数法表示"方程"，其形式完全对应于现代数学中线性方程组的增广矩阵。从对"方程"解法之构造来说，"令每行为率"即是视"方程"每行为一组率，这一原则的确定，为上述矩阵施行种种行的变换和算法机械化提供了条件。"行之左右无所同存"是说同一"方程"中不应出现两行数字相同或相同的率，这一原则与"皆如物数程之"共同构成"方程"解的适应性即解的惟一性的条件。

二、对"方程"的程序设计——《九章算术》的"遍乘直除"程序

对"方程"的程序设计，是数学构造性方法精彩的一例。由于"方程"模型及其解之特殊构造性，决定了可以对它施行种种行的消元变换的过程，因而构造性就与算法的机械化特色联系在一起。从现代观点来说，"方程"的演算程序类似于矩阵的"初等变换"算法，即相当于利用线性方程组的系数增广矩阵进行初等变换来求解

以"方程"章第一问为例：

> 今有上禾三秉、中禾二秉、下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉、中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉、中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？

《九章算术》给出结果之后，提出了"方程"的解法程序。

首先采取在算板上布列"方程"，然后反复对"方程"施行基本的运算即"遍乘"、"直除"的行变换。所谓"遍乘直除"就是用一个方程(一般从右行开始)某项系数乘第二个方程所有的项(称为遍乘)，再从变换后的方程各项反复减去第一个方程的相应项，直至该未知数的系数化为0为止，这种变换程序可依次进行，总可在有

限步内完成。以消去中行首项为例："以右行上禾遍乘中行而以直除"。

"方程术"，可以分为9个程序步骤：

①置上禾三秉、中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方。中、左禾列如右方。

②以右行上禾遍乘中行而以直除。

③又乘其次，亦以直除。

④然以中行中禾不尽者遍乘左行，而以直除。

⑤左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实。

⑥求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实。

⑦余，如中禾秉数而一，即中禾之实。

⑧求上禾，亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实。

⑨余，如上禾秉数而一，即上禾之实。实皆如法，各得一斗。

程序①即按分离系数法将前后3次试验所得的12个数据布列成右、中、左3行排列成矩阵形式如下：

	左	中	右	
头位	1	2	3	上禾
中位	2	3	2	中禾
下位	3	1	1	下禾
	26	34	39	实

程序②～⑨即遍乘直除过程，相当于对如下增广矩阵的消元变换：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{vmatrix} \xrightarrow[3\times(2)-2\times(1)]{\text{程序②}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{vmatrix}$$

$$(3)\quad(2)\quad(1)\qquad\qquad\qquad(3)\quad(4)\quad(1)$$

$$\xrightarrow[3\times(3)-(1)]{\text{程序③}}\left|\begin{matrix}0&0&3\\4&5&2\\8&1&1\\39&24&39\end{matrix}\right| \xrightarrow[5\times(5)-4\times(4)]{\text{程序④}}\left|\begin{matrix}0&0&3\\0&5&2\\36&1&1\\99&24&39\end{matrix}\right|$$

$$\begin{matrix}(5)&(4)&(1)\end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}(6)&(4)&(1)\end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{作除法得下禾}]{\text{程序⑤}}\left|\begin{matrix}0&0&3\\0&5&2\\4&1&1\\11&24&39\end{matrix}\right| \xrightarrow[4\times(4)-(7)]{\text{程序⑥}}\left|\begin{matrix}0&0&3\\0&20&2\\4&0&1\\11&85&39\end{matrix}\right|$$

$$\begin{matrix}(7)&(4)&(1)\end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}(7)&(8)&(1)\end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{作除法得中禾}]{\text{程序⑦}}\left|\begin{matrix}0&0&3\\0&4&2\\4&0&1\\11&17&39\end{matrix}\right| \xrightarrow[4\times(1)-(7)-2\times(9)]{\text{程序⑧}}\left|\begin{matrix}0&0&12\\0&4&0\\4&0&0\\11&17&111\end{matrix}\right|$$

$$\begin{matrix}(7)&(9)&(1)\end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}(7)&(9)&(10)\end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{作除法得上禾}]{\text{程序⑨}}\left|\begin{matrix}0&0&4\\0&4&0\\4&0&0\\11&17&37\end{matrix}\right|$$

$$\begin{matrix}(7)&(9)&(11)\end{matrix}$$

但是,“方程术”的直除变换并未进行彻底,在求出左行下禾之实之后,求中禾、下禾之实的方法,相当于现今的代入法,程序化不够。刘徽按照“方程”术的消中行头位、左行头位和次位的方法,设计出依次消中行下位、右行下位和次位的方法,从而将消元程序进行到底。但考虑到“用算繁而不省”,而创造新法的目的在于运算简便:“所以别为法,约也。”既然达不到目的,刘徽又说:“然犹不如自用其旧”,即仍用《九章算术》中的方法。他在第二种方法中,求

中禾时不使中行中禾乘数扩大,并且由于求了下禾一乘之实,可以实施约分程序,避免了庞大的数字,变得简便。若消右行的次位、下位以求上禾之实,其优越性更为明显。

"方程"术就是以《九章算术》"方程"章首题为范例用直除法解线性方程组的完整程序。在以后的"方程"类问题中,开头就说"术曰如方程",有时紧接着列出的数据——这相当于现代算法语言中的"调用"(calling)标准程序和给参量"赋予"(assigning)新值。

4.3 开方算法程序系统

中国古代把开方法与二次、三次或高次数字方程解法统称为开方术。《九章算术》少广章提出了完整的开平方、开立方程序 。

一、《九章算术》的开平方程序

开平方相当于求 $x^2=N$ 的根。

> 开方术曰:"置积为实。借一算,步之,超一等。议所得,以一乘所借一算为法,而以除。除已,倍法为定法。其复除,折法而下。复置借算,步之如初。以复议一乘之,所得副以加定法,以除。以所得副从定法。复除,折下如前。若开之不尽者,为不可开,当以面命之。若实有分者,通分内子为定实。乃开之。讫,开其母,报除。若母不可开者,又以母乘定实,乃开之。讫,令如母而一。"

《九章算术》给出的术文言简意赅,在开方筹式中每一个数字的记数和入算,都严格遵循位值制。由于其中明确指出"复除,折而下"、"复除,折下如前",可见这是一个具有一般性的机械化算法程序。即是说,不论平方根有多少位数,反复实施这一程序都可求出来。所以,在此有必要对一般情形下的这种机械化程序加以剖析。

总的来说,开平方的程序是:首先作四行的筹式布算,即从上到下的四行依次布以方根("议所得")、被开方数(实)、法和借算,

然后机械反复实施"超"、"议"、"除"、"折"的四个步骤，直至"适尽"，结束

"超"：将置于个位上的借算自右向左隔一位移一步，移到与实的最高位（N 为奇数位）或次高位（N 为偶数位时）对齐为止。若移 n 位，则相当于将方程进行倍根变换，变换后的方程为 $10^{2n}x_1^2 = N$ 的形式，如图(2)。

"议"：议得根的第一位得数为 a_1。

"除"：以 a_1 乘借算 10^{2n} 得 $10^{2n}a_1$ 作为法。置于第三行，使得以法除实时，恰得商 a_1，而余数 N_1 小于 $10^{2n}a_1^2$，$N \div (10^{2n}a_1) = a_1 + \frac{N_1}{10^{2n}a_1}$。

"折"：撤去借算，将法 $10^{2n}a_1$ 加倍为定法，并将定法向右退一位为 $2 \cdot 10^{2n-1}a_1$ 如图(4)，再在下行个位上布置借一算。

为求方根第二位得数，需要重复以上四个步骤：

"超"：将置于个位上的借算自右向左隔一位移一步，显然只需移 $n-1$ 步，即 10^{2n-2} 如图(5)，这又相当于求方程 $10^{2n-2}x_2^2 + 2 \cdot 10^{2n-1}a_1x_2 = N - 10^{2n}a_1^2$ 的正根。

"议"：复议得根的第二位得数 a_2。

"除"：以 a_2 乘借算 10^{2n-2}，加定法，得法 $2 \cdot 10^{2n-1}a_1 + 10^{2n-2}a_2$，同样以法除实，

$$(N - 10^{2n}a_1^2) \div (2 \cdot 10^{2n-1}a_1 + 10^{2n-2}a_2)$$
$$= a_2 + \frac{N_2}{2 \cdot 10^{2n-1}a_1 + 10^{2n-2}a_2}$$

余数 N_2 小于 $(2 \cdot 10^{2n-1}a_1 + 10^{2n-2}a_2)a_2$。如图(6)，如果余数为零，则开方完毕；若不为零，则"折下如前"，按接下来的程序步骤继续开方。

通过对上述筹算开平方法的分析，可知它是根据下面这些公式来逐步推求的，与现代的迭代方法完全一致，可以通过计算机来实现：

$$(a+b)^2=a^2+(2a+b)b$$

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+[2(a+b)+c]c$$

$$(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+[2(a+b+c)+d]d$$

……

开平方术文还有对几种特殊情况的处理方法。一是被开方数为分数的情形，要"通分内子"，若分母是平方数，则分子、分母分别开方，然后相除，即 $A=\frac{b}{a}$，$\sqrt{A}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$；若分母不可开，则以分母乘分子，开分子后再以分母除，即：$A=\frac{b}{a}$，$A=\frac{ab}{a^2}$，$\sqrt{A}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$。二是开方不尽的情形，这相当于求无理根，称为不可开，求出整数部分后，"以面命之"。

显然，有了以上的程序和处理方法，任何一个数都可以开平方，说明《九章算术》的术文更具有抽象性、普适性。《九章算术》中共有五道专门提供开平方演算的问题，在其他一些题目中也涉及开平方运算。

中国古代数学将求二次方程 $x^2+bx+c=0(b,c>0)$ 的正根称为开带从平方法，《九章算术》虽未给出开带从平方的程序，但是开方术中从求根的第二位得数起，便是求形如 $x^2+bx=c(b>0,c>0)$ 的方程的正根的程序。因此，实际上《九章算术》已经包含了开带从平方的程序。

二、《九章算术》的开立方程序

开立方相当于求 $x^3=N$ 的根。《九章算术》开立方术是：

置积为实。借一算，步之，超二等。议所得，以再乘所借一算为法，而除之。除已，三之为定法。复除，折而下。以三乘所得数，置中行。复借一算，置下行。步之，中超一，下超二等。复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定除。除已，倍下、并中从定法。复除，折下如前。开之不尽者，亦为不可开。若积有分者，通分内子为

定实。定实乃开之。讫，开其母以报除。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。讫，如母而一。

《九章算术》少广章有四道应用开立方演算的问题。下面以少广章第19题为例来解释术文，说明开立方程序。原题为：

又有积一百八十六万八百六十七尺。问为立方几何？

此题相当于求1 860 867之立方根。

(1) 置积为实。借一算。

作左行布算。由上到下依次是："商"("议得")、"实"、"法"、"中行"和"借算"。本题开立方数为1 860 867，即为"实"，将"借算"置于个位上，为1。

(2) 步之，超二等。

将借算自右向左隔二位移动一次，以确定其最高位数。(共移三步，说明根是三位数)移动后，借算表示1 000 000。

(3) 议所得，以再乘所借一算为法，而除之。

"议"得第一位数字为1，在百位上。以此数的平方乘以"借算"为"法"，除"实"恰得"商"1：

1 860 867 ÷ 1 000 000 = 1 + 860 867/1 000 000

(4) 除已，三之为定法。复除，折而下。

将"法"乘3为"定法"，然后退一位成：

1 000 000 × 3 ÷ 10 = 300 000 如图(4)。

(5) 以三乘所得数，置中行。复借一算，置下行。

即以3乘"议得"之商1，为3×1，布置于中行。再按(1)的方法重新"借一算"布置于下行个位。如图(5)。

(6) 步之，中超一，下超二等。

将"中行"3×1由右向左隔一位移一步，共移二位，为30 000，同时将"借算"隔二位移一步，共移三位，为1000。如图(6)。

(7) 复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。

又在十位上"议得"第二位得数为2，以此商2乘"中"得2×30 000 = 60 000；以此商2的平方乘"下"得2^2 × 1000 = 4000。将这两个乘积暂时分置在"中"、"下"之旁边，称为"副"，再将它们加到

"定法"300 000上,得 300 000+60 000+4000=364 000。如图(7)。

(8) 以定除。除已,倍下、并中从定法。

用"定法"除"实",即在"实"这一行中做除法运算,860 867÷364 000=2+132 867/364 000。然后以 2 乘"下"副 2000:2×4000=8000,再以"中"副之数 60 000 一同加到"定法"之中,得:364 000+60 000+2×4000=432 000。

(9) 复除,折下如前。

在个位上"议"得立方根的第三位数字 3,依照(7)、(8)布置"借算"为 1,又确定"定法"为 44 289;然后在"实"这一行做除法运算,有

132 867÷44 289=3+0/44 289

余数为 0,表明已经开尽。因此立方根为 123。

议得							
实	1	8	6	0	8	6	7
法							
中行							
借算							1

(1)

议得							
实	1	8	6	0	8	6	7
法							
中行							
借算	1						

(2)

议得					1		
实	1	8	6	0	8	6	7
法	1						
中行							
借算							1

(3)

议得					1	
实	8	6	0	8	6	7
法	3					
中行						
借算	1					

(4)

议得				1		
实	8	6	0	8	6	7
法	3					
中行						3
借算						1

(5)

议得				1		
实	8	6	0	8	6	7
法	3					
中行		3				
借算			1			

(6)

议得				1	2		
实	8	6	0	8	6	7	
法	3						
中行		3					(副)$2\times30\,000$
借算			1				(副)$2^2\times1000=4000$

(7)

议得				1	2		
实	1	3	2	8	6	7	
法	4	3	2				
中行		3	6				(副)$2\times30\,000$
借算			1				(副)$2^2\times1000=4000$

(8)

议得			1	2	3
实					0
法	4	3	2	8	9
中行			3	6	3
借算					1

(9)

《九章算术》也未给出开带从立方的程序，但是开立方术中从求根的第二位得数起，便是求形如 $x^3+bx+cx=d(b>0,c>0,d>0)$ 的方程正根的程序，因此，实际上，《九章算术》也已经包含了开带从立方的程序。

对比开平方术和开立方术，不难看出，两种开方的程序基本上是统一的，都是通过筹式布算，机械重复地实施"超"、"议"、"除"和"折"的四大步骤，直至适尽，结束。只是在开立方的筹式布算中，在"法"和"借算"之间增加一行"中行"，使原来的四行布算变为五行布算，并在相应的"超"和"折"的步骤中有细小的变动或调整。对被开方数是分数或分母不是立方的情形，处理的方式与开平方相同。这说明，开立方的程序也具有抽象性和普适性，适应任何一

个数的开立方。根据术文，对一般情形下的开立方及其与开平方程序过程的比较可见下表。

通过分析上面的筹算开立方方法，可知它是根据下面这些公式来逐步推求的，也和现代迭代的方法完全一致，可以在计算机上实现。

$$(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$

$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c$$

$$(a+b+c+d)^3=(a+b+c)^3+[3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2]d$$

三、《九章算术》"开方术"与现代计算机程序比较

以上开平方、开立方、开带从平方和立方程序，共同构成中国古代数学一个独立的算法程序系统——开方算法程序系统，《九章算术》中开方算法程序不仅表现了中国筹算所能达到的高超的算技，而且充分体现了中国数学思想方法的构造性和算法机械化特色。《九章算术》与这种开方算法具有的代数意义密切相关。由于在开方中都借用一根算筹分别表示未知量的平方和立方，这样就赋予用算筹所列出的开方式以 $x^2=N$ 和 $x^3=N$ 两个代数方程，于是，开平方和开立方的各个演算步骤也就成了解方程求正根的过程。事实上，要保证算法程序机械化的一步步进行，并在有限步骤内求得方根的每一位得数，从这种二项二次方程或二项三次方程的代数意义上，都要经过以下三个步骤：

Ⅰ 首先把方程进行倍根变换，估计方根的第一次近似值。

Ⅱ 每求得方根的一次近似值之后，就利用二项展开式将原方程进行减根变换，求出一个新的方程。

Ⅲ 在新方程中，以定法除实即以一次项系数除常数项，求得方程的下一次近似值，因此这些步骤可循环重复，直至根值全部求出或求到一定数位乃止。

以开立方为例，相当于求方程 $f(x)=x^3-N=0$ 的正根，估计方根的第一次近似值为 x_1，依Ⅱ进行减根变换，即令 $x=x_1+y$

商				$10^n a_1$	$10^n a_1$	$10^n a_1$	$10^n a_1$
实	开平方	N	N	$N-10^{2n}a_1^2$	$N-10^{2n}a_1^2$	$N-10^{2n}a_1^2$	$(N-10^{2n}a_1^2)-(2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2)a_2$
	开立方				$N-10^{3n}a_1^3$	$N-10^{3n}a_1^3$	$N-10^{3n}a_1^3(N-10^{3n}a_1^3)-(3\cdot10^{3n-1}a_1^2+3\cdot10^{3n-2}a_1a_2+10^{3n-3}a_2^2)a_2$
法	开平方			$10^{2n}a_1$	$2\cdot10^{2n}a_1$	$2\cdot10^{2n-1}a_1$	$2\cdot10^{2n-1}a_1+10^{2n-2}a_2$
	开立方			$10^{3n}a_1^2$	$3\cdot10^{3n}a_1^2$	$10^{3n-1}a_1^2$	$3\cdot10^{3n-1}a_1^2+3\cdot10^{3n-2}a_1a_2+10^{3n-3}a_2^2$
中行	开平方	无					
	开立方				$3a_1$	$3\cdot10^{3n-2}a_1$	$3\cdot10^{3n-2}a_1$(副)$3\cdot10^{3n-2}a_1a_2$
借算	开平方	1	10^{2n}	10^{2n}		10^{2n-2}	10^{2n-2}
	开立方	1	10^{3n}		1	10^{3n-3}	10^{3n-3}(副)$10^{3n-3}a_2^3$
程序		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

则 $y=x-x_1$ 代入 $f(x)=0$ 得 $y^3+3x_1y^2+3x_1^2y=N-x_1^3$ 再依Ⅲ $y=(N-x_1^3)/3x_1^2=-f(x_1)/f'(x_1)$，因此 $x=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$。

这就是《九章算术》开方术的演算原理，这一原理，恰好是牛顿-拉弗森（Newton-Raphson）解法的根据。

现代计算机要用牛顿一类的迭代法求一元二次或三次方程 $f(x)=0$ 的根，首先大致估计出根的范围，给一个初值 x_0，然后可用迭代公式 $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$ 依次求出第 $i+1$ 次根的近似值 x_{i+1}，设 ϵ 是所求根的精度要求，若满足 $|(x_{i+1}-x_i)/x_{i+1}|<\epsilon$，则 x_{i+1} 的值即为所求方程的解，否则再求 $x_{i+2}=x_{i+1}-f(x_{i+1})/f'(x_{i+1})$，然后再判断 $|(x_{i+2}-x_{i+1})/x_{i+2}|<\epsilon$ 是否成立，直至满足精度为止。由此看来，迭代法也是程序化较强的算法，它是将每一次求得的新值又作为下一次的初值来推求，直到前后两次求出的值很接近，即接近真正的根，而且其初估值 x_0 以及每次的近似值也不一定是所求方根的每一位得数，这和中国古算开平方和立方求方根的方法、程序不同。中国古算开方程序在有限步骤内依次求得方根的每位得数，通过倍根变换，估得方根的最高位得数，再通过减根变换，求得新方程和下一次近似值，即为所求方根的次高位得数，如此继续下去……直至结束。

内蒙古师范大学科学史研究所的沙娜曾用计算机"FORTRAN77"程序语言设计出"开方术"的计算机程序，并对《九章》开方术与现代计算机开方中用到的牛顿迭代法进行了比较，指出虽然古今开方原理一样，然而在具体程序进行中，因计算工具不同，其算法亦不尽相同，因而"开方"计算机程序也不完全同于一般的计算机牛顿开方算法。

计算机：

一般牛顿法开方有两个缺点：①在理论上初始值 $X_1>0$ 即可，然而计算时此值若不在根附近，则往往不收敛。②在计算机中用到一阶微分 $f'(x)$，但它可能无法得到或不易列出。这两点在一般的开方中还并不明显，但在以后的高次方程的数值解中则显

得突出

筹算：

（1）对初始值的选取，由于一开始倍根，使得初始值很容易估计在根附近，并由于采用位置值制，使这一步极易做到。由于这个方法被一直保留到高次方程的数值解中，因而在高次方程数值解中亦不存在问题。

（2）一阶微分即减根方程中的"方"，由于是用二次展开式系数得到，所以很好计算，在以后的高次方程数值解中，因用"增乘"方法得到，亦是很易计算与表达的。

计算机：

在求根的下一位有效值时，其值不取整，亦无倍根过程，因而迭代次数是筹算的1—2倍，当然对计算机这并不算什么。

筹算：

因用手移动筹来计算，计算次数不仅劳作繁忙且易出错，对此筹算采取了取整的方法，使运算一次即可得到一位有效值，减少了计算量，使用筹开方成为可能，这些方法均保留至以后的高次方程数值解中。

中算史学家们对开方算法的代数意义及其构造性和机械化思想方法进行了深入的探究，发现开方算法用来求方程的数值解不仅较目前的牛顿一类的迭代法直截了当，而且可排除各种病态的优越性是颇为显著的[1]。以上讨论为此观点提供了又一佐证。

《九章算术》中的开方程序一方面奠定了中国开方术历史的良好基础，开方术后来不断改进和发展，成为中国古代数学的一个重要的分支，同时也是中国古算中最发达的领域——解一般高次数字方程的程序，并取得了具有世界意义的重大成就；另一方面，中国古代虽然能解高次方程，但没有考虑过用一个公式来表示一个方程的根，唐代僧一行和元代朱世杰虽然有类似的公式表示法，但

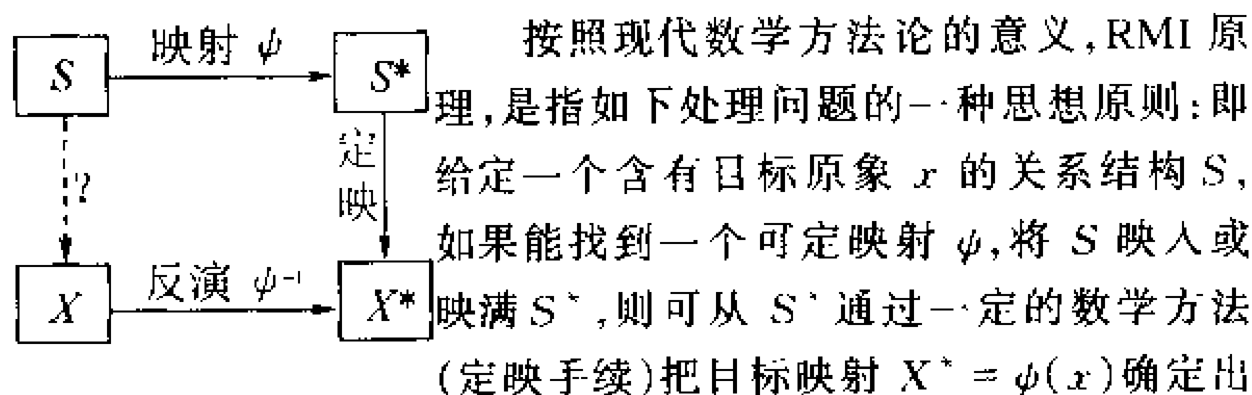
---

[1] 吴文俊，从《数书九章》看中国传统数学的构造性和机械化特色，《秦九韶与〈数书九章〉》，北京师范大学出版社，第80页，1987年。

中国古代重视数值计算,用公式求正根不如直接开方便捷,故公式表示一直没有受到重视。

4.4 从 RMI 原理看盈不足的构造及算法程序

关系(Relationship)、映射(Maping)、反演(Inversion)原理,简称 RMI 原理,是现代数学方法论的重要内容,其实质是依据数学模式及其对应关系,将较困难的问题转化为较容易的问题,最终达到问题的解决。RMI 作为一种普遍的思想方法,在人们认识事物、分析和解决问题中有着广泛的应用价值。



按照现代数学方法论的意义,RMI 原理,是指如下处理问题的一种思想原则:即给定一个含有目标原象 x 的关系结构 S,如果能找到一个可定映射 ψ,将 S 映入或映满 S^*,则可从 S^* 通过一定的数学方法(定映手续)把目标映射 $X^* = \psi(x)$ 确定出来,进而通过反演 ψ^{-1} 又可把 $x = \psi^{-1}(x^*)$ 确定出来,这样,原来的问题就得到了解决。用框图表示见右图。其过程有如下的步骤:

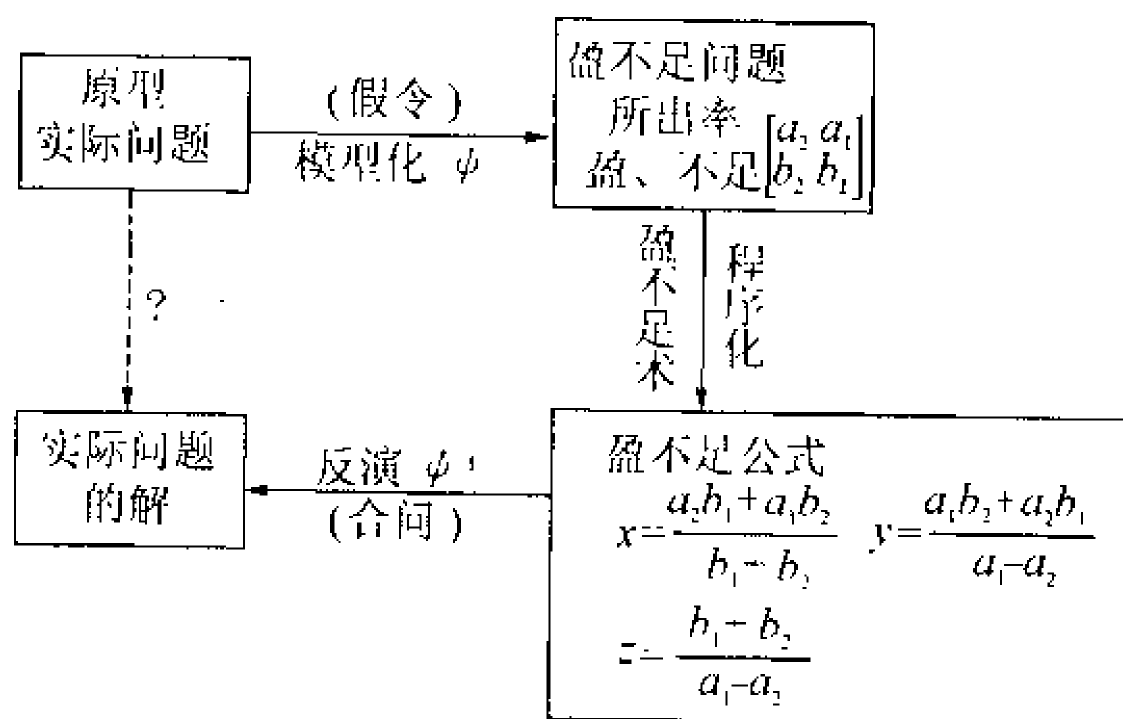
关系→映射→定映→反演→得解

从古算理论的渊源来说,盈不足术无疑是我国古代独立的创造,实质也是 RMI 的表现。在数学发展的早期,要解决复杂的问题很不容易,中国古算家通过两次假设与检验(如刘徽所谓的"课"),即把实际应用问题构造成特定的盈、不足模式:

$$\begin{matrix} \text{假令} \\ \text{盈 不足} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

这实际上是数学问题的一种"模式化"构造过程,即 RMI 中的映射 ψ。通过这种模式化构造,一般应用问题(这相当于 RMI 中的 S)就转化为特定的盈不足问题(这相当于 RMI 中的 S^*)求解。这说明通过映射 ψ 可将 S 映入或映满 S^*。总结盈不足算法的实际

应用、盈不足的构造为人们提供了处理问题的 RMI 方法，因为问题本身是来自原型的，是现实中的问题 其中许多都是较复杂的实际问题，当以两次假设提出盈不足构造问题时，实现了从现实原型到盈不足模型的对应关系这是映射 φ，此时的问题已是模型化了的问题，这是定映 S^*；盈不足术即是针对这种数学模型的算法，由于具有一般性和机械性的特点，按程序一步步运筹即得盈不足公式，把问题中的数据代入公式，得到盈不足问题的解，再回到实际问题的解，就是反演 φ^{-1}。盈不足模型化方法可用下图表示：



综上所述，我们不难得出这样的结论：从分数算法的出现，到盈不足的问世，我国古代数学家在寻求数学应用问题的普遍解法的道路上，经过了长期的探索而卓有建树，中算理论在数学问题模式化与解法程序化方面不断进入更高的水平，充分显示出古代传统数学构造性与机械化的特色。

4.5 盈不足算法的现代教育意义

一、模型化方法

《九章算术》盈不足章的前八题，以"共买物"问题为模型，给出了各类盈亏问题求解的演算法则，盈不足问题可表达为下面的数

学模型：

今有共买物，人出（钱）a_1，盈 b_1；人出（钱）a_2，不足 b_2，问人数、物价各几何？

《九章算术》给出了两种盈不足术，其一为：

> 置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并，以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈、不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。

依据造术原理，作为 RMI 定映手段的盈不足术的演算过程就是以齐同原理、今有术为基本内容的率的变换，是基于直线内插思想运用和机械化的算法。

$$\begin{matrix}\text{置所出率}\\ \text{盈、不足}\end{matrix}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{维乘}} \begin{bmatrix} a_2b_1 & a_1b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{并}} \begin{bmatrix} a_2b_1+a_1b_2 \\ b_1+b_2 \end{bmatrix} \begin{matrix}\text{实}\\ \text{法}\end{matrix} \xrightarrow{\text{实如法而一}}$$

$$\longrightarrow \frac{a_2b_1+a_1b_2}{b_1+b_2}\text{为每人应付的钱数}$$

$$[a_2 \quad a_1] \xrightarrow{\text{以少减多}} a_1-a_2 \begin{cases} \text{约实} \rightarrow \dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1-a_2} & \text{为物价} \\ \text{约法} \rightarrow \dfrac{b_1+b_2}{a_1-a_2} & \text{为人数} \end{cases}$$

二、化归方法

盈不足的构造提供了解决一般算术应用问题的算法基础，因为从构造原理上来说，对于一个算法问题，任意假设两数作为答数，依据题设的条件验算，总会出现有盈、不足和适足三种情况之一，而两次假设就会出现盈不足、盈适足、不足适足以及两盈和两不足共五种类型。

盈不足算法程序具有一般性，其他类型的盈亏算法程序都可统一地化归为盈不足算法程序，求解公式在本质上也都是一致的。《九章算术》第七章盈不足章就分别提出了各种不同类型的解法，其公式都可类似地由算法推导出来。若引进负数及零，用负的盈

数表示不足，负的不足表示盈，再用零表示适足，则五种类型就可完全统一于盈不足公式求解。《九章算术》用盈不足算法解决了许多较复杂的应用问题，充分证明这种方法在古代应用的普遍性。

例：《九章算术》盈不足章第 13 题："今有醇酒一斗，值钱五十；行酒一斗，值钱一十。今将钱三十，买酒二斗。问醇、行酒各几何？"

本题的术文是："假令醇酒五升，行酒一斗五升，有余一十。令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足二。"古代的换算关系是：一斗为一十升。

这实质上就是巧妙利用两次假设，构造了盈不足模型。例如若把醇酒改成每人出钱数，本题就转化为：

今有共买物，人出（钱）五，盈一十；人出（钱）二，不足二，问每人应出多少钱？

因此，对于醇酒，有盈不足模型：

$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$代入盈不足公式就可求得醇酒：$\frac{2\times10+5\times2}{10+2}=\frac{5}{2}$（升）

同样，对于行酒，也可得出盈不足模型：

$\begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$代入盈不足公式就可求得醇酒：$\frac{18\times10+15\times2}{10+2}=\frac{25}{2}$（升）

应当指出的是，盈不足具有模型化的方法，这是从数学方法论的角度来分析的，是说一般的"盈不足问题"就是所构造的数学模型。从现代意义上讲，"数学模型乃是针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系，采用形式化的数学语言，概括地或近似地表述出来的一种数学结构"。古代的数学模型当然没有这样严格，我们也不能苛求古人"形式化的数学语言"，对"数学结构"也只能作简单化的解释。但是，无论如何，这种把问题一般化，以特定的数学模型来处理一大类应用问题的方法，正是中算家所擅长的，也为现代数学方法论产生与发展作了较好的诠释。

第5章　齐鲁文化与数学家刘徽

5.1　刘徽对数学机械化程序的贡献

《九章算术》作为中国古代数学体系的中心，其本身也是个不封闭的体系，有不尽的发展余地给后人。特别是历代不少算家都对它进行了注释，并在注释中不断创新，使之在深度和广度上有新的发展，这与中算家追求算法机械化的努力相一致。刘徽的《九章算术》注继承了《九章算术》中的思想和方法，对其中的各种机械化算法和公式进行总结分析和不断改进，并有许多创造，对提高数学机械化的程度和水平做出了重大贡献。如他首创割圆术求圆周率的正确方法，从中可以发现明显的循环语句和子程序的思想，割圆术是一种典型的计算机循环语句。他对开方程序进行了改进并创造了解线性方程组的互乘相消法和方程新术，在算法理论方面，刘徽建立了从一般比例算法到"方程"的一系列筹式运算的统一理论，他以率的基本运算为"纲纪"，把《九章算术》中的衰分、均输、盈不足和"方程"诸术都以率概念贯穿下来，于是实现了筹式运算的模式化与程序化，从而奠定了筹算的机械化的理论基础。刘徽的程序化思想，简约而又全面，各方面内容相通而又不显繁琐，从而把中国古代数学机械化建立在一个更高的层次和水平上。

一、率及其应用问题解法程序

中国古代数学以算为主，中心课题是寻求应用问题的一般解法，这就要找到一种量作标准，从此出发，建立一套算式和它们相应的各种算法。中算家们考察的各种数量关系中，最基本的、最重要的就是"率"。《九章算术》在有的术文和题目中使用了率。而刘徽视率为运算的纲纪，将率的应用扩展到大部分算法的论证和

百个左右题目的算法中。率是中算许多理论的基础和算法的源泉，可以说，不懂得率就无法理解中国古代数学的特点。[1]

1. 率之概念及有关算法程序

何为率？率的本义是标准、标尺的意思。刘徽将率的意义拓广到数学中："凡数相与者谓之率。""相与"实质上是一种线性相关。"数相与"即是相关之数量。诸物之率即是按某一公度作标准的数量，因此，率的概念揭示了相关事物之间的数量关系的本质。"中算家关于率的概念是围绕着一系列算法而产生和发展起来的，它不仅构成中国古代分数论的理论基础，而且是处理中国古算系统中一系列涉及多个数量关系的算法的有力工具，同时，由于采用算筹记数和表达数量关系，中算家在率的概念之深刻、应用之广泛，以及有关算法的灵活性和机械化程度等方面都胜过古希腊一筹。"[2]

2. 比例的最基本、最简单算法程序——今有术

今有术是《九章算术》中广泛应用的程序步骤和普遍法则。今有术被刘徽称为"都术"，他指出："此都术也。凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。诚能分诡数纷杂，通彼此之否塞，因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。"从算法程序上说，可以说是最简单的机械化程序。《九章算术》中凡涉及正比、反比、连锁比、配分比、合比、分比等诸类问题，都将归为"以今有求之"，相当于现代电子计算机的"调入语句"。

3. 最基本算法程序原理——齐同术

在率"错互不通"时，须"齐同以通之"。刘徽对齐同思想作了广泛的延拓，从中可以将齐同术概括为是在相关而错互不通的诸数量中，使同一数量相与通同，而与之相关的量随之变化以使其相与关系保持不变（即齐）的等量变换。从解法程序一般性上分析，广义的齐同即是实施由"错互不通"之率化为可以互通之率的算法程序，设有两种率：$(a_1, a_2, \cdots, a_k)$和$(b_k, b_{k+1}, \cdots, b_n)$，齐同程序如下：

---

[1] 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科技出版社，第142页，1992年。

[2] 刘钝，大哉言数，辽宁教育出版社，第154页，1993年。

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k) \xrightarrow{b_k \text{乘}} (a_1 b_k, a_2 b_k, \cdots, a_k b_k)$$

$$(b_k, b_{k+1}, \cdots, b_n) \xrightarrow{a_k \text{乘}} (b_k a_k, b_{k+1} a_k, \cdots, b_n a_k)$$

于是得到一组相应的率：$(a_1 b_k, a_2 b_k, \cdots, a_k b_k, b_{k+1} a_k, \cdots, b_n a_k)$

上式中若 $k=2, n=3$，即为通分运算，而且多于两组的若干组率也可以仿此齐同程序化为一组相应的率用于计算，故刘徽说："故此，虽四五转不异也。"这适用于复杂的连锁比问题。

齐同不仅是通分和连比例运算的重要程序，而且是盈不足术和方程术的理论基础，故刘徽称齐同之术时说："然则齐同之术要矣，错综度数，动之斯谐，其犹佩觿解结，无往而不理焉。乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。"

4. 比例应用问题的解法程序

《九章算术》中除"粟米"之外，衰分、均输等章都是专门讲用比例方法解决各种应用问题的。刘徽以率的关系构成许多筹式的基础，从而发展了率的概念和今有之术，把由两个数量组成的率，拓展为多个数量组成的列衰，由正比的衰分演化为反比的返衰，"均输"可以看做是由正、反比例错杂交互的更为复杂的配分比例问题，从而实现了筹式运算的模式化和程序化。古代社会实践中提出的形形色色的算术应用问题，中算家依据率的关系构造出列衰、返衰等各种算式，并规定出相应的演算程序，体现了中算家在处理正、反比例及混合比例问题时的技巧和筹式运算机械化的特色。

衰分问题就是比例问题，刘徽说："列衰，相与率也。"所以"于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数"。《九章算术》给出一般衰分问题的算法，它是在筹算板上布列为一定的筹式并按固定的程序进行演算的，整个解题程序分三大步骤：

第一步，"各置列衰，副并为法"。这是布列衰分演算筹式，即安排列衰$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，并将比数("衰")之并数"副"置于列衰之旁边，称为副并$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$。

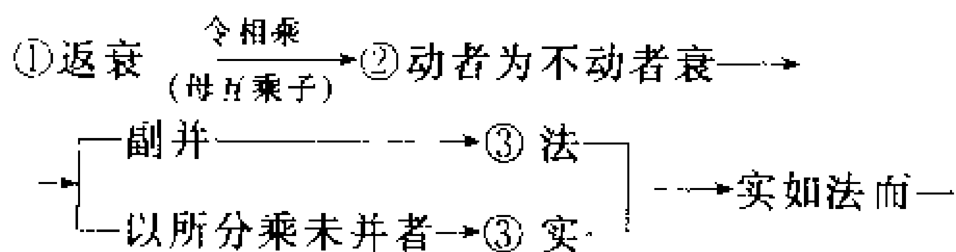
第二步，"以所分乘未并者各自为实"，即依次计算出实：Aa_i $(i=1,2,\cdots,n)$。

第三步,"实如法而一,不满法者,以法命之"。以"副并"除各数并约简。衰分术的布算和推演程序见框图:



衰分术的关键步骤是列衰,这里要求将分配的数量化为最简形式,即化为相与率的简约式 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。列衰一旦确定,便可实施衰分术中的固定的程序求解,表现出明显的机械化特色。

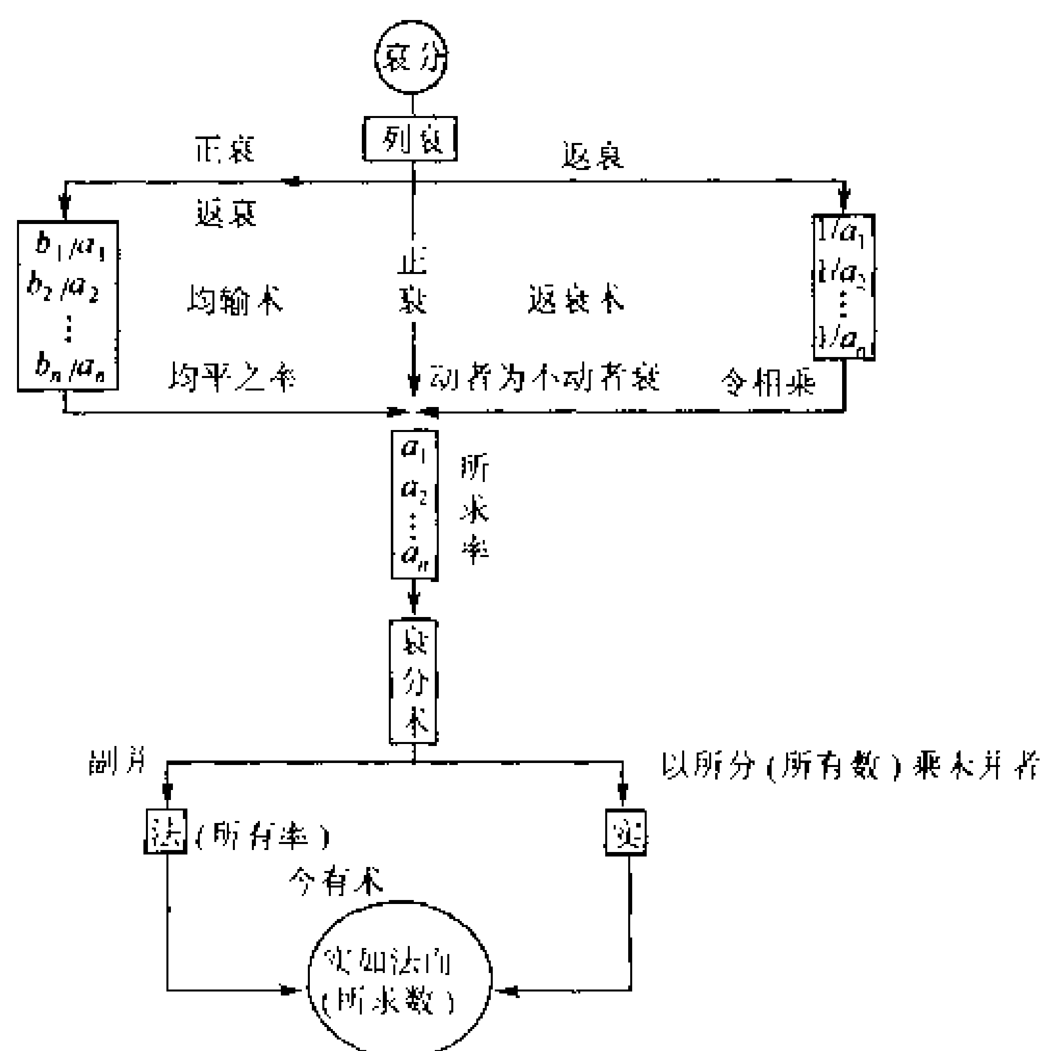
与衰分术以 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为衰相对应的,若以 $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n})$ 为衰,就成为"返衰术"即反比例算法,这只需将分数衰化为整数,其余的演算程序与衰分术无异,而实现这个化分为整的算法程序就是"母互乘子"。返衰术曰:"列置衰而令相乘,动者为不动者衰。"所谓"动者为不动者衰",即是说以"动者"(变动后的分子 $a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n$)代替"不动者"(即原分母 a_i)为"衰",这样就变成了以 $(a_2a_3\cdots a_n, a_1a_3\cdots a_n, \cdots, a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n, \cdots, a_1a_2\cdots a_{n-1})$ 为衰(可约简)的衰分问题了,其余就可机械地实施衰分术三大步骤解之,这样中算家就把返衰与衰分二者统一起来了。返衰术的布算和推演程序简列如下:



均输问题可归结为以 $(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n})$ 为列衰的衰分问题求

解　均输问题包含着若干正、反比例量的复杂的分配问题。均输术的关键问题还在于列衰，即根据实际情况决定什么是正衰，什么是返衰，然后完全可以归结为衰分术的筹算运算的机械化过程。在算法上，它表现了古代算家在处理复杂的（正、反比混合）比例分配问题所达到的成就，以及在筹式算法程序设计上的技巧和筹算运算的机械化特色。

通览《九章算术》可知，现代所谓的正比、反比、连锁比、比例分配等各种比例问题，在中国古代都以率的关系构成筹算模式的基础，并规定相应的演算程序，最后又统一地归结为今有和衰分去解决，故刘徽注中常用"今有衰分求之"的话。处理有关率的问题，关键是要根据条件确立列衰，是正衰、返衰，还是它们的组合，所谓"分诡数之纷杂，通彼此之否塞，因物成率"，从而决定应分别采用哪种相应的算法程序化归为衰分、今有术的筹算运算的机械化过程。笔者作下表试图表现各种比例及其应用算法在机械化程序化方面的相互关系：



比例及其应用算法程序框图

二、刘徽对"方程"机械化程序的贡献

1. 刘徽的互乘相消程序

刘徽的算法理论,把"方程"作为"率"的算法理论的应用和发展 刘徽在"方程"中"令每行为率","方程"的每一行是一组率,遍乘后直除,便可用率之齐同来解释:对整行,可以施行"约以聚之"、"乘以散之"——一行的各项同时扩大或缩小相同的倍数;对两整行,可以施行"齐同以通之"——使两行中某对应的项相同,而使各行中其余的项分别与该项相齐。这与互乘后相消结果完全相同,因此,《九章算术》中的直除消元法就可用互乘相消法代替,加之直除法消元要反复相减,十分烦琐,刘徽创造互乘相消法,使演算程序大大简化,为一大进步。"方程"第七问即牛羊值金题,刘徽便采用互乘相消法,这实际上是进行如下变换:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \\ B & A \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_1 \\ a_1 B & A b_1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_2 \\ a_1 B - A b_1 & A \end{vmatrix}$$

刘徽说:"以小推大,虽四、五行不异也。"指出互乘相消法可以适用于更多行的"方程"说明它是一个普遍的方法。

"方程术"具有前面提出的机械化算法的四条性质,因而可以写成现代算法语言程序,在电子计算机上应用。笔者就根据直除消元和互乘消元法实现了在计算机上解"方程"章第一问,这就是解线性方程组

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & (1) \\ 2x + 3y + z = 34 & (2) \\ x + 2y + 3z = 26 & (3) \end{cases}$$

步骤如下:

(1) 打印系数表

(2) 消去(2)和(3)中的 x:(2)×3-(1)×2 和(3)×3-(1),经过一次消元,得方程组

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & (1) \\ 5y+z=24 & (2a) \\ 4y+8z=39 & (3a) \end{cases}$$

(3) 消去(3a)中的 y:以 (3a)×5－4×(2a),经过第二次消元,得方程组

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & (1) \\ 5y+z=24 & (2b) \\ 36z=99 & (3b) \end{cases}$$

(4) 消去(1)和(2b)中的 z:以(2b)×36－(3b)和(1)×36－(3b)经第三次消元可得

$$\begin{cases} 108x+72y=1305 & (1c) \\ 180y=765 & (2c) \\ 36z=99 & (3b) \end{cases}$$

(5) 消去(1c)中的 y,以(1c)×180－(2c)×72,经过第四次消元可得方程组

$$\begin{cases} 19\,440x=179\,820 \\ 180y=765 \\ 36z=99 \end{cases}$$

(6) 遍约可得

$$\begin{cases} x=37/4 \\ y=17/4 \\ z=11/4 \end{cases}$$

根据以上步骤,我们把方程(1)(2)(3)的系数放在 A 数组中,可用双下标变量形式表示,在程序运行过程中进行消元,使 A(1,2),A(1,3),A(2,1),A(2,3),A(3,1),A(3,2)均为零,则最后 A(1,4),A(2,4),A(3,4)的值即为方程组中 x、y、z 的解,程序如下:

```
9      DIM A(3,4)
10     PRINT"THE TABLE OF COEFFICIENTS"(系数表)
11     FOR I=1  TO  3
```

```
12    FOR J = 1  TO  4
13    READ A(I,J)
14    PRINT A(I,J)
15    NEXT J
16    PRINT
17    NEXT I
20    FOR J = 1  TO  3
21    LET C1 = A(J,J)
22    FOR I = J  TO  3
23    IF I = J THEN 26
24    LET C2 = - A(I,J)
25    GOSUB  60
26    NEXT  I
27    NEXT  J
30    FOR J = 3 DOWN  TO  1
31    LET C3 = A(J,J)
32    FOR I = J DOWN  TO  3
33    IF I = J  THEN 36
34    LET C4 = - A(I,J)
35    GOSUB  40
36    NEXT  I
37    NEXT  J
40    FOR R = 4 DOWN  TO  J
41    LET A(I,J) = A(I,R) * C3 + C4 * A(J,R)
42    NEXT  R
43    RETURN
50    FOR I = 1  TO  3
51    LET  C5 = 1/A(I,J)
52    PRINT "X(";I;")=";A(I,4) * C5
53    NEXT I
```

```
54      GOTO  80
60      FOR S=J  TO  4
61      LET A(I,S)=A(I,S)*C1+C2*A(J,S)
62      NEXT  S
63      RETURN
70      DATA  3,2,1,39,2,3,1,34,1,2,3,26
80      END
```

以下为程序的运行结果：

```
THE TABLE OF COEFFICIENTS
3    2    1    39
2    3    1    34
1    2    3    26
x(1)=37/4
x(2)=17/4
x(3)=11/4
```

2. 刘徽对"方程"解法程序的理论贡献

刘徽在对"方程"提出"令每行为率"的基础上，阐述了直除法消元和互乘法消元的理论基础——"举率以相减，不害余数之课也。"即以方程的某一整行或整行的倍数与另外的行相减，得到与原方程同解的方程，这就是两行相减不影响"方程"的解的原理。这与现今线性方程组理论中行列式的任一行乘以某数加到另一行上，所得到的新行列式的值不变的定理是一致的。这里刘徽实际上是把它作为公理来应用的。

刘徽进一步以齐同原理来解释和说明这两种变换："先令右行上禾乘中行，为齐同之意。为齐同者，谓中行直减右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣。"就是说，以右行上禾乘中行，是为了齐同，而要做到齐同，则需要中行直减右行。"同"是同两行相应的未知数的系数，"齐"是齐常数项及其他项系数，以符合"举率以相减"。显然，只要遵循齐同，则不会影响方程的解。互乘相消法也是这个道理。如第七题注说："假令为同齐，头位为牛，

当相乘左右行定。"使两行牛的系数互乘，同其牛，然后齐其羊和金，"牛数等同，金多二十两者，羊差二十一使之然也"。

3．正负术的引入是"方程"算法机械化的结果

在解"方程"进行消元过程中，要进行两行间的对减相消，不可避免地会出现"以大减小"不够减的情形，要保证这种机械化的算法畅通无阻，就必须引进负数和建立正负数的运算法则。刘徽"方程"章正负术注云："方程自有赤、黑相取，法、实数相推求之术，而其并减之势不得广通，故使赤、黑相消夺之。"例如，"方程"章第三问：

> 今有上禾二秉、中禾三秉、下禾四秉，实皆不满斗。上取中、中取下、下取上各一秉而实满斗。问上、中、下禾实一秉各几何？

依题意"方程"模式布列如右图，由于实施两行对减时会遇到以正数减零的情形，故此筹式运算在正数范围内无法进行，在这种情况下，负数的引入和正负数运算法则的建立是必须的。负数引入适应了采用筹式的机械化算法解"方程"的需要。

左	中	右	
|		||	上禾
	|||	|	中禾
||||	|		下禾
|		|	实

阿拉伯人虽然通过印度人的著作已熟悉负数以及负数的运算，但他们摒弃了负数。数学家阿尔·花拉子模的代数学名著阿拉伯文手稿《Al-jabr w'al muqabala》，Aljabr 原意是"还原"，实指把负项移到方程另一端变成正项，保持方程平衡。"muqabala"意即"化简"或"对消"即把方程两端相同的项消去或合并同类项，花拉子模提出的"还原"与"对消"两种变换，正是通过从 ax^2+bx+c 这种形式的式子里减去或加上一些项，"他解出了一次和二次方程，但保留六种不同的形式如 $ax^2=bx$，$ax^2=c$，$ax^2+c=bx$，$ax^2+bx=c$ 以及 $ax^2=bx+c$，而让 a、b、c 总是正数，

这就避免了单独出现负数以及减数可能大于被减数的情形"①。其实,在未引入负数的早期代数学里,大抵就是这样求解方程的。

仍以上题为例,用现代符号表示,相当于解线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 3y + z = 1 & (2) \\ x + 4z = 1 & (3) \end{cases}$$

如果不用对减的机械化消法,完全可以避免负数的引入而求得方程的解。如贾宪就提出了避免负数出现的方法,其方法是:

(1) 当以右上二乘左行,加中行数,以右行减之

(2) 中三乘左行,今以中行二度对减之,即

$$\begin{vmatrix} 1 & & 2 \\ & 3 & 1 \\ 4 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{2\times 左 + 中 \quad 右} \begin{vmatrix} & & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 9 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{3\times 左 - 中 \quad 中} \begin{vmatrix} & & 2 \\ & 3 & 1 \\ 25 & 1 & \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

便可求出下禾之实。

这样,始终保持各项皆取正号而求出下禾之实,在这里完全避免了负数运算,并且进行了两行以上的四则运算,是个创举。通过这个反例说明:正负术的引入是"方程"算法机械化的结果。

综上比较有如下结论:中算家引入负数概念以及刘徽用"正无入负之,负无入正之"等来规定正负数加减的法则,是在中国古代筹算模式的特殊条件下为了克服直除法要求"以少行减多行"的限制而产生的,它解决了"并减之势不得广通"与"方程"算法程序化的矛盾,从而使解"方程"能够依照一个既定的程序在有限步骤内得到结果,这是中国古代数学的构造性及其算法的机械化特色的又一个充分体现。

4. 刘徽的"方程"新术

刘徽特别注意到"方程"各行就是诸物之率的线性关系,又创

---

① [美]M. 克莱因.古今数学思想(第一册).张理京等译.第220页.上海科学技术出版社,1979年

造了"方程"新术。其基本思想是：通过直除或互乘相消法诸行相消，先消去各行下实（相当于常数项），再转向消"物"，使得每行只剩下两物相当之率，对易其数，求得两两相与之率，通过齐同，使诸率悉通，化成一组"率"的关系，最后用今有或衰分程序求解。

刘徽的"方程"新术是对"方程"解法的创新。"新术"与"旧术"的区别主要在于"新术"先消"下实"，再转而消"物"，以寻求各"物"之率的关系，从而归结为用衰分术，即按配分比例法求解。对于复杂的方程，由于求诸物的相与之率的消元过程程序太多，算法复杂，故往往并不比旧术方便。如《九章算术》"方程"章第十八题，刘徽用旧术77步，而用新术达124步[①]。刘徽创造新术可能是在探索"方程"术与率的联系中获得的，它反映了刘徽试图将解"方程"纳入到率的应用从而构建统一筹算理论体系的思想，另一方面也表现了他重视深入理解数理，"广异法"之创造才能。

三、刘徽对开方程序的改进

刘徽借助于出入相补原理，对《九章算术》提出的开平方、开立方程序给予几何解释，从而证明了开方程序的合理性，使人们对开方术有了直观性的感性认识。同时，在阐述其几何意义时，对开方程序也作了改进，以往论者认为刘徽的开方程序与《九章算术》相同，刘徽只是解释了《九章算术》的程序，郭书春先生经过研究指出二者起码有两个重大不同：

首先，《九章算术》中，在议得某位得数（设第一位 a，第二位 b）后，算出法（或定法）（开平方是 a 及 $2a+b$；开立方是 a^2 及 $3a^2+3ab+b^2$），再"以法除实"，使得"实如法"恰恰得到该位得数。此"除"即除法，显然它还保留了开方由除法脱胎出来的痕迹，刘徽注开方术，是将"除实"解释成以议得数乘法（开平方是 a^2 及 $(2a+b)b$；开立方是 a^3 及 $(3a^2+3ab+b^2)b$）。减实，此"除"，即减，这无疑是程序上的一大进步。

---

① 郭书春等，成就卓著的中国古代数学，辽宁古籍出版社，第74页，1995年。

其次，《九章算术》的借算在每使用一次后都要撤去，议得次一位得数时要复置借算（开立方时还要置中行）于个位，再“步之如初”，显得烦琐，刘徽则保留借算，将中行与借算先与法对齐，再通过退位求减根方程，显得简洁。

总之，通过刘徽的改进，程序已简便得多，已基本接近于现今方法，后来在《孙子算经》，《张丘建算经》及贾宪《黄帝九章算经细草》中得到了继承和发展。

5.2 圆面积公式与圆周率究竟是怎样推求的

一、割圆术——机械化思想与极限思想的有机结合

从有限分割到无限分割，是中国古代传统求积方法的自然发展，基于有限分割的出入相补仅适用于简单图形的求积问题，而对于诸如圆面积、弓形面积、球体积、阳马体积等计算便无能为力。在古代几何学占有极为重要地位的圆的度量问题，是由“直”跨入“曲”的关键的第一步，也是数学思想从“有限”进入“无限”的一次飞跃。刘徽对圆田术的证明是在“方田章”对圭田、邪田、箕田诸术等采用的出入相补的割补法基础上的几何上的构造与逻辑推理的统一，是有限的机械化分割与极限思想的有机结合。由于在有限步骤内可以获得任意精确的结果，也只能获得任意近似的结果，而命题最终成立是通过无穷的极限过程来实现的。

刘徽之前，一直以“周三径一”作为圆的周、径之比值。我国古代最重要的数学经典——《九章算术》方田章提出了平面曲边形的面积公式，其中有圆面积的公式：“半周、径相乘得积步。”即 $S=\frac{1}{2}Lr$，另有 $S=\frac{1}{4}Ld$，$S=\frac{3}{4}d^2$ 及 $S=\frac{1}{12}L^2$（其中 L、r、d 分别是圆周长、半径和直径）。对于这些公式，都是用传统的以盈补虚的方法近似证明的。由于长期沿用“周三径一”之古率，比较粗略。从东汉到魏晋以来，改进圆周率的精度始终为数学家所关注，但都不甚精确，并未找到圆周率的科学计算方法。刘徽把机械化方法

和极限思想应用于近似计算,在中国第一次提出了求圆周率近似值的科学方法,这是他的重大贡献。

首先,刘徽从圆内接正6边形开始割圆(图5-1)。他说:“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣。”即是说,如此继续下去,对于这个正6×2^n($n=0,1,2,3,\cdots$)边形序列,设S_n是6×2^n边形的面积,L_n是每边长,割得越细,即n越大,$S-S_n$就越少,割至不可割时,则圆内接正多边形便与圆周合为一体,这就证明了

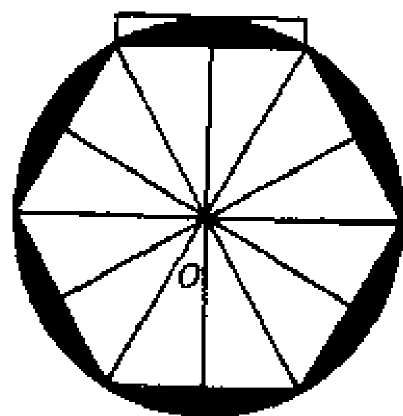


图5-1 圆内接正六边形割圆

$$\lim_{n\to\infty}6\times2^nL_n=L$$

此时,$\lim\limits_{n\to\infty}S-S_n=0$,或$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$

接着,刘徽指出,每一次分割中,圆内接正多边形的每边与圆周之间都有一个余径r_n,若将所有边长乘以余径r_n加到正多边形面积上去,则其和又大于圆面积,即

$$S_n<S<S_{n-1}+2(S_n-S_{n-1}) \qquad (1)$$

但随着“割之又割”,余径r_n越来越小,即$n\to\infty$时,$r_n\to0$有

$$\lim_{n\to\infty}[S_{n-1}+2(S_n-S_{n-1})]=S$$

这样,刘徽以不可割的极限状态,证明了与圆周合为一体的正多边形的面积就是圆面积。

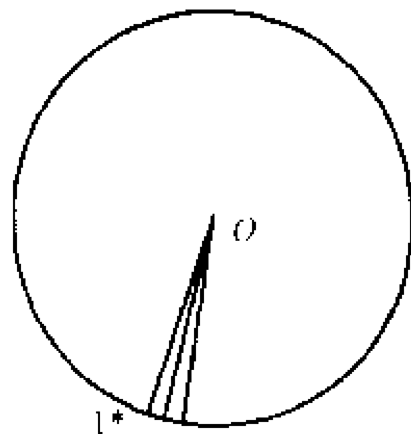


图5-2 以O为圆心的小等腰三角形

最后,刘徽“觚而裁之”,即对于与圆周合为一体的正多边形进行无穷小分割,分成无穷多个以正多边形每边为底,以圆心O为顶点的小等腰三角形(图5-2),由于每一小三角形面积(设为A)等于这一小三角形底边长(设为1^*)乘半径r的一半:$A=\frac{1}{2}1^*r$。圆的面积S等于这无穷多个小三角形的面积之总和,即

$$S = \sum_{1}^{\infty} A = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} l \cdot r = \frac{1}{2}Lr \tag{2}$$

这样，通过对直线形的无穷小分割，然后求其极限状态的和的方式，就证明了圆面积公式为圆周长与半径乘积的一半，即 $S = \frac{1}{2}Lr$。

以上刘徽的“割圆术”开辟了崭新的、精确地解决圆面积问题的方法。而他关于圆周率近似计算的科学方法，就是以证明圆面积精确公式为基础的。

刘徽依据割圆术开创了求圆周率精确近似值的方法程序，这也是把机械化思想和极限思想用于近似计算，在中国第一次提出的求圆周率的科学方法和正确可行的程序：刘徽根据勾股定理计算觚幂，然后根据觚幂的值可推求圆周率 π 的值。这是一种典型的循环算法过程。

刘徽计算圆周率近似值的科学方法，依刘徽注原文，刘徽给出的计算圆内接 $2n$ 边形的边长的程序如下：

程序(1)　割六觚以为十二觚术曰：

置圆径二尺，

半之为一尺，即圆里六觚之面也。

令半径一尺为弦，半面五寸为句，为之求股。

以句幂二十五寸减弦幂，余七十五寸，

开方除之……得股……

以减半径余……谓之小句。

觚之半面而又谓之小股，为之求弦。

其幂……余分弃之。

开方除之即十二觚之一面也。

程序(2)　割十二觚以为二十四觚术曰：

亦令半径为弦，半面为句，为之求股。

………

即二十四觚之一面也。

程序(3)　　割二十四觚为四十八觚术曰：

亦令半径为弦，半面为句，为之求股。

………

即四十八觚之一面。

程序(4)　　割四十八觚以为九十六觚术曰：

亦令半径为弦，半面为句，为之求股。

………

即九十六觚之一面。

程序(1)(2)(3)(4)是完全同样的计算 12、24、48、96 边形边长(觚面)的程序。它们之间仅有的差别就是赋予"面"以新值，事实上，刘徽将每一次迭代过程结束时所得之值"赋"给下一迭代过程的参变量"面"。这是一个典型的循环语句的例子"Do $I=1$ to N"(此处 $N=4$，但刘徽的计算一直进行到 $N=8$)。

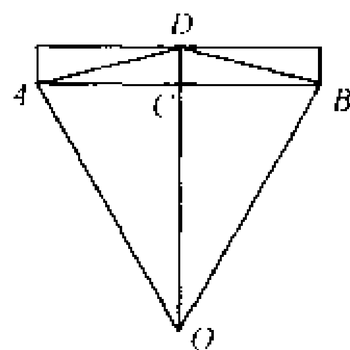


图 5-3　圆内接正六边形的局部

刘徽取直径为 2 尺的圆，因此圆内接正六边形边长为 1 尺，按割圆程序，割圆内接正六边形为正 12 边形时，如图 5-3，AB 为圆内接正六边形之一边长，三角形 OBC 构成一勾股形。$BC=r/2$，$OB=r$，OC 为边心距。由勾股定理得：

$$OC=\sqrt{OB^2-BC^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r=866025\frac{2}{5}(\text{忽}).$$

再求出余径 $r_0=CD-r-OC=r-\frac{\sqrt{3}}{2}r=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r=133974\frac{3}{5}$(忽)。另外，考虑另一勾股形 BCD、BD 即为分割成的圆内接正 12 边形的边长，由勾股定理

$$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}r\right)^2+\left(r-\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2}=\sqrt{(2-\sqrt{3})}\,r=$$

$\sqrt{267949193445}$(忽)，以上程序完全可以递推，于是可以依次求出圆内接正 6×2^1 边形的边心距、余径；正 6×2^2 边形的边心距、余

径；正 6×2^3 边形的边长、边心距、余径；以及正 6×2^4 边形的面积 S4、边长；6×2^5 边形的面积 S^5，这些计算出的数据如下表 1[①]（空缺出为刘徽未计算者）。

表 1　计算数据

正多边形	6	6×2^1	6×2^2
面积（寸²）			
边长	1 000 000	$\sqrt{267\,949\,193\,445}$	$\sqrt{68\,148\,349\,466}$
边心距	$866\,025\frac{2}{5}$	$965\,925\frac{4}{5}$	$991\,444\frac{4}{5}$
余径	$133\,974\frac{3}{5}$	$34\,074\frac{1}{5}$	$8\,555\frac{1}{5}$
正多边形	6×2^3	6×2^4	6×2^5
面积（寸²）		$313\frac{584}{625}$	$314\frac{64}{625}$
边长	130 806	65 438	
边心距	$997\,858\frac{9}{10}$		
余径	$2\,141\frac{1}{10}$		

刘徽算出 $S_5=314\frac{64}{625}$寸²，再求出差幂 $S_5-S_4=\frac{105}{625}$寸²，则 $2(S_5-S_4)$为 6×2^4 边形各边长乘余径的总面积；$S_4+2(S_5-S_4)=314\frac{169}{325}$寸²。由于(1)式，有

$$S_5<S<S_4+2(S_5-S_4)。$$

圆面积 S 必在所求得的 $314\frac{64}{625}$寸² 与 $314\frac{169}{625}$寸² 之间，刘徽舍弃了分数部分，取 314 寸² 作为圆面积的近似值，以此代入已证明的公式(2)，即 314 寸² $=\frac{1}{2}L\times10$ 寸，$L=\frac{2\times314}{10}$寸 = 6 尺 2 寸 8 分，

① 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科技出版社，1992 年，第 238～239 页。

与直径 $d=2$ 尺相约得 $\pi=L/d=157/50$，相当于 $\pi=3.14$，后人称 157/50 为"徽率"。从理论上讲，利用这种方法可以求得任意精度的圆周率近似值，这一点刘徽是十分清楚的。

二、中学数学课本中的问题症结

尽管圆周率的计算是国人乐于称道的成就，刘徽求圆周率的方法是新文化运动以来 70 余年中国数学史界涉及最早、谈得最多的课题之一，但实际上，人们却并没有完全搞清楚刘徽注，因而自然就未能按刘徽注来阐述刘徽的方法。

以上刘徽推求圆周率的过程，只是反复运用了两个勾股形的勾股定理以及已经求得的圆面积公式(2)，并未运用别的圆面积公式。但是，许多学者认为，刘徽在求出圆面积的近似值 314 寸^2 之后，使用了现今中学数学课本中的 $S=\pi r^2$，因 $r=10$ 寸，于是 $314=\pi\times10^2$，所以 $\pi=3.14$[①]。这一看法与刘徽的原文一一对照，便会发现它背离了刘徽注。同时这也导致我们中学数学的数学史教材或参考书在引用这部分史实时的偏差，以及不少数学教师在介绍这部分数学史实时所犯的错误[②]。不仅如此，这一错误理解还会把刘徽置于循环推理的错误之中。事实上，《九章算术》并未提出形如 $S=\pi r^2$ 的圆面积公式，只有与其相当的公式 $S=\frac{3}{4}d^2$，刘徽在求圆周率时也并未证明 $S=\frac{3}{4}d^2$ 的正确性，更未证明 $S=\pi r^2$ 公式，恰恰相反，他用自己求出的周、径相与之率 157:50 修正

---

① 钱宝琮在《中国数学史》中有："$314\frac{64}{625}<100\pi<314\frac{169}{625}$，刘徽舍弃不等式两端的分数部分，即取 $100\pi=314$，或 $\pi=\frac{157}{50}$。"以后数学史界多沿用此。

② 李铭心、汪德昔《中学数学中的数学史》中有"$3.14+\frac{24}{62500}<\pi<3.14+\frac{169}{62500}$"；杜玉祥等主编的《简明初等数学史教程》中有"得 $S=3.14$(尺^2)，此时半径为1尺，由 $S=\pi r^2$，得 $\pi=3.14$"。

了《九章算术》圆面积公式 $S=\frac{1}{2}Lr$ 和 $S=\frac{1}{4}Ld$ 所属的两个例题，并将 $S=\frac{3}{4}d^2$ 修正为 $S=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{157}{100}d^2$，将 $S=\frac{1}{12}L^2$ 修正为 $S=\frac{1}{4\pi}L^2=\frac{25}{314}L^2$。显然，如果按上述对刘徽的误解，刘徽的工作变成了用某公式求得一个数值后，又用这个数值来修正该公式本身，从而将他置于循环推理的错误之中。

人民教育出版社出版的九年义务教育几何教本(1994 年版，第 190 页)中，对圆周率的介绍是：运用倍边公式可算出圆内接正 n 边形的边长，从而可知圆内接正 n 边形的周长与圆的直径之比，当 n 增大时，就越来越接近圆的周长与直径的比值，这个值就是圆周率。而圆面积公式也可以由正 n 边形的面积 $S=\frac{1}{2}l_nr_n$ 得到。这里所引史料也不合刘徽原意：

其一，由前文分析比较可知，刘徽推求圆周率的程序与证明圆面积公式的方法有密切的关系。刘徽是先证明圆面积公式，然后再以此推求圆周率的，而不是没有顺序，更不能相反，这正说明 $S=\frac{1}{2}Lr$ 是推求 π 的基础。

其二，对于圆面积公式，刘徽并非由正 n 边形的面积 $S=\frac{1}{2}l_nr_n$ 通过求极限直接得到，他是先证明圆面积就是"与圆周合体"的极限状态，然后再通过"觚而裁之"，即对于与圆周合为一体的正多边形进行无穷小分割，接着求其极限状态的和的方式，才证明圆面积公式 $S=\frac{1}{2}Lr$ 的，刘徽的无穷小分割思想是不能忽视的。

其三，刘徽对 π 的推求也并非由圆内接正 n 边形的边长求得周长再与圆的直径之比来逼近。事实上，他从圆内接正 6 边形开始，按割圆程序，对于正 6×2^n 边形序列，依次求出各边长、边心距、余径，推求 $6\times 2^{n-1}$ 的面积 S_{n-1}、6×2^n 边形的面积 S_n，反复运

用 $S_n < S < S_{n-1} + 2(S_n - S_{n-1})$，求出每一次圆面积 S 的近似值，再运用已证明的 $S = \frac{1}{2}Lr$，来求得圆的周长，再与圆的直径之比来求得 π 的

三、对现代中小学数学教学的启示

数学教学中，关于圆周率的教育价值应得到充分挖掘和客观体现。一个数学家评价说："历史上一个国家所算得的圆周率的准确程度，可以作为衡量这个国家当时数学发展水平的指标。"刘徽开创的求圆周率的科学方法和程序，他只通过圆内接正多边形逼近圆的方法，使之赶上并超过了阿基米德（Archimedes，公元前287～前212）而取得独立的伟大成就，也因此奠定了以后我国在圆周率计算方面领先世界其他民族千余年的理论基础，成为中华古算发达的重要标志。事实上，刘徽计算到 S_5 得到一个更精确的数据 $\pi = L/d = 3927/1250$，相当于 $\pi = 3.1416$。他又依次求出圆内接正 $6 \times 2^8 = 1536$ 边形的边长，得出了正 $6 \times 2^9 = 3072$ 边形的面积 S_9，求出周、径相与之率，重新验证了上述数值是比较精确的。据推测，我国南北朝的著名数学家祖冲之（429～500）就是依据刘徽的这套割圆程序求得圆周率值 π 在3.1415926与3.1415927之间的。如果这种推测正确的话，那么，祖冲之需要计算出圆内接正6144边形和12288边形的面积。祖冲之的圆周率值领先世界达千年之久，成为广大炎黄子孙的自豪和骄傲。在国外，直到1427年，中亚数学家阿尔·卡西才超过了8位有效数字，而祖冲之的密率355/113，直到16世纪末才由德国的奥托（V. Otho，1550?～1605）等提出。因此，数典不能忘祖，今天对圆面积公式及圆周率近似值的科学推算史实的澄清，将给我们的数学教学以重要启示：它使我们重新认识了作为数学家的刘徽——他的无穷小分割思想、极限思想、机械化的方法，他做出的贡献及其深远的历史影响，这就为在教学中增强学生爱国主义情感和民族自豪感，提供了客观、公正的数学史实，因而能更好地发挥其教育价值。

5.3 刘徽的几何构造与数学证明

一、"出入相补，各从其类"——"几何代数化"的杠杆

"出入相补，各从其类"是我国古代构造性证明的最突出体现。刘徽在《九章算术注》中针对"勾股术"曾作了如下解释："勾股自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂，开方除之，即弦也"。这就是出入相补原理的由来。

吴文俊院士对中国数学的这一重要方法十分重视，为此著《出入相补原理》一文专门论述，并作总结指出：所谓出入相补原理，用现代语言来说，就是指这样的明显事实：一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把一个平面图形分割成若干块，那么各块面积之和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样[①]。

出入相补，后来发展成为中国古代用于处理面积或体积问题的一种传统方法，这种方法更好地体现出了中国数学的构造性质及其这种方法的优越性，在中算史上，刘徽、赵爽、宋元以及清代数学家们都应用它解决数学问题，出入相补几乎成了中国古代数学"几何代数化"的一个杠杆。

二、刘徽原理

刘徽还用无穷小分割和极限方法证明了一条极为重要的原理："邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。"即由一个堵分成的阳马和鳖臑，其体积之比为2:1，吴文俊称之为刘徽原理，对于由阳马和鳖臑拼合成的堑堵，当长、宽、高相等时用棋验法便可证明；而对于长、宽、高不等时，刘徽用三个互相垂直的平面垂直平分堑堵，通过拼凑、组合，所分割的堑堵的3/4

---

① 吴文俊，吴文俊文集，山东教育出版社，第75页，1986年。

中，属阳马与属鳖臑的体积之比为2∶1，即 $V_{阳}:V_{鳖}=2:1$，而在余下的1/4堑堵，由于结构与原堑堵完全相似，故这种分割和拼合的方式完全可以递推，重复上述分割，则在原堑堵的（1/4·3/4）中，又可证明原理成立，而在余下的1/4即原堑堵的（$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$）中可无限继续分割下去，"半之弥少，其余弥细。细曰微，微则无形，由是言之，安取余哉？"即没有证明的部分占原堑堵的$\frac{1}{4^n}$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{4^n}\to 0$，这部分的体积最终变为0，这样，一般情况下的整个堑堵中的刘徽原理得以证明。这是一套严整的程序，仍是机械化思想与极限思想的有机结合。

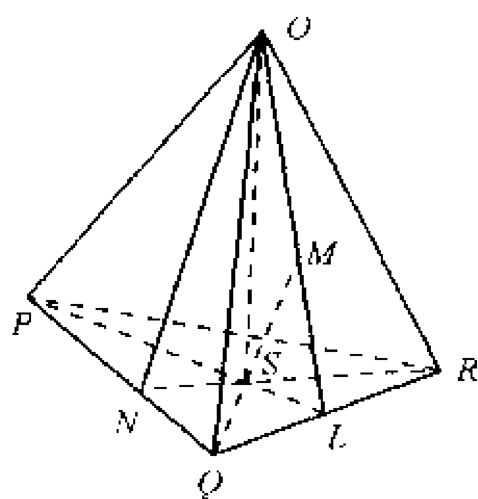


图 5-4

从这一原理容易得到鳖臑和阳马的体积公式，由于《九章算术》及刘徽注解决体积问题的出发点是把一般的多面体分解为一些基本的立体、立方、堑堵、阳马、鳖臑，而任一四面体都可以分割为六个鳖臑，如图5-4，因而整个多面体和体积理论可奠基于刘徽原理以及出入相补原理基础之上。

三、球体积的研究

刘徽发现了《九章算术》中球体积公式不正确，试图利用刘徽原理求出正确的球体积公式。他的做法是："取立方棋八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆囷，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。八棋皆似阳马，圆然也。按合盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。"这是说，刘徽首先取8个边长为1寸的小立方，堆积在一起构造为1个边长为2寸的大立方。然后作球的外切立方体，然后用两个直径等于球径的圆柱从立方体内切贯穿（图5-5）。于是，球便被包在两圆柱相交的公共部分，而且与圆柱相切。刘徽只保留两圆柱的公共部分，取名"牟合方

盖”。(图 5-6)根据刘徽原理,球体积与牟合方盖体积之比等于圆面积与外切正方形面积之比,即 $\pi:4$。只要求出牟合方盖体积,整个问题就迎刃而解了。刘徽没有成功,只好“以俟能言者”。

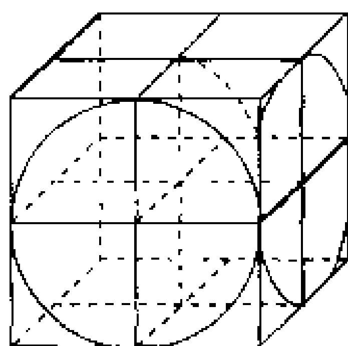


图 5-5

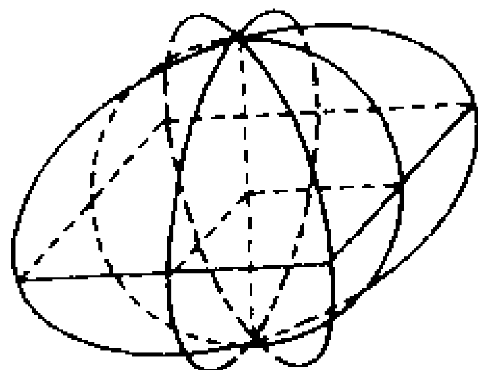


图 5-6

刘徽开辟了通向球体积公式的正确道路但没有达到目标。但他的思路正确,为后人解决这一问题打下了基础。祖冲之父子在这条路上继续前进,终于完成了刘徽的未竟之业。祖冲之与戴法兴辩论时曾说:“至若立圆旧误,张衡述而弗改……。此则算氏之剧疵也。”可见他对球体积问题进行过深入研究。至于他是否解决了这一问题,不见记载。

根据唐代李淳风注《九章算术》“开立圆术”时引用的资料来看,祖暅之确实解决了这一问题。他很可能是在父亲工作的基础上取得突破的。祖暅之在研究球体积时继承了刘徽的思想,抓住关键性的牟合方盖的体积计算。但他吸取了刘徽的教训,不再直接求方盖体积,而是首先研究立方体内除去牟合方盖的部分。他利用了图形的对称性,着重研究这部分的1/8,并称之为“外棋”,相应的牟合方盖的 1/8 为“内棋”,内棋与外棋共同构成“棋”,即小立方体,它显然是原立方体的1/8(图 5-7)。

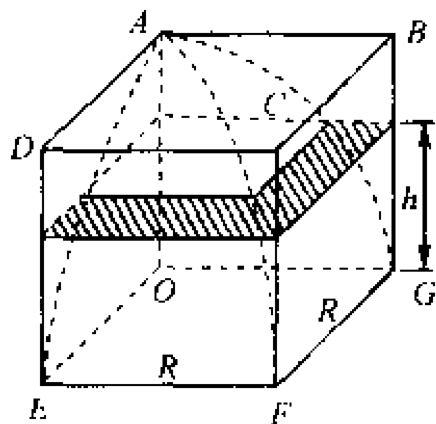


图 5-7 $\frac{1}{8}$ 合盖与 $\frac{1}{8}$ 合盖差

设球半径为 R,于高 h 处作内棋截面,则截面一边长为 $\sqrt{R^2-h^2}$,截面面积为 R^2-h^2(图 5-8),因为内外棋截面面

积之和等于R^2,所以高h处的外棋截面为h^2(图5-9)。再作一个底边和高都是R,且有一条棱垂直于底面的倒立四棱锥,则棱锥在高h处的截面也是h^2(图5-9)。祖暅之研究了各体积的关系,提出"幂势既同,则积不容异"的原理。其中"幂"是面积,"势"是关系,"积"是体积。这句话的意思是:在两立体中作与底平行的截面,若截面积处处相同,则两立体体积相等。祖暅之原理是刘徽原理的特例,西方称此为卡瓦列里原理,因为它曾被17世纪的意大利数学家卡瓦列里(B.Cavalieri,1598-1647)重新发现。

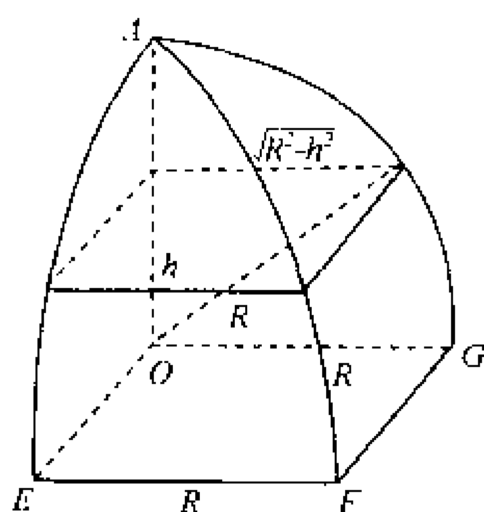


图5-8

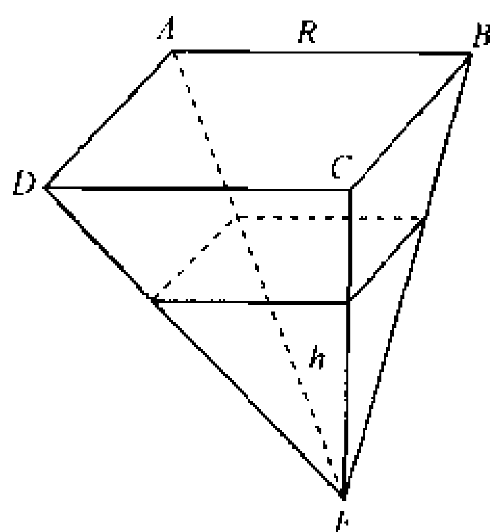


图5-9

根据祖暅之原理,很容易得到外棋与倒立四棱锥体积相等的结论,而棱锥体积为$\frac{1}{3}R^3$,由此知道外棋体积。所以内棋体积为$R^3-\frac{1}{3}R^3=\frac{2}{3}R^3$,牟合方盖体积为$8\times\frac{2}{3}R^3=\frac{16}{3}R^3$。祖暅之知道刘徽的"牟合方盖与其内切球体积之比为4∶π"的结论,所以可立即得到:

$$V_{球}=\pi\cdot\frac{16}{3}R^3\div4=\frac{4}{3}\pi R^3$$

这便是正确的球体积公式。自《九章算术》以来,历经4个多世纪,这一问题终于得到圆满解决。在祖暅之前,阿基米德曾用平衡法求得球体积公式,两人的工作是各具特色,殊途同归的。

5.4 “为数学而数学”——刘徽科学价值观

中国古代数学成就辉煌，已得到世界的公认。中国古代数学在发展过程中表现出自己独特的风格和特点。一般说来，中国古代的贤哲们重综合轻分析、重思辨而轻逻辑、重实用而轻纯粹理性，先秦诸子的科学研究不及古希腊思想家，这是无可怀疑的。但是西方学者与一些中国学者却过分低估了中国古代科学价值和科学研究中的纯理论兴趣。如英国数学家和哲学家怀特海在20世纪20年代写道：“中国人就个人的情况来说，从事研究的禀赋是无可置疑的，然而中国的科学毕竟是微不足道的。如果中国如此任其自生自灭的话，我们没有理由认为它能在科学上取得任何成就。”[1] 前苏联的数学史家尤什凯维奇和比利时的中国数学史家李培始在评价中国数学时宣称，中国中世纪的所有数学著作都没有证明，中国直到宋代才出现做纯粹理论研究的“独立数学家”[2]。日本的数学史家三上义夫也认为，中国古代数学最大的缺点是缺少严格求证的思想[3]。即使对中国古代数学成就比较客观、公正的李约瑟博士也断言，在从实践到纯知识领域的飞跃中，中国数学是未曾参与过的[4]。由于种种原因，李约瑟等人的某些不恰当的观点在国内流传甚广，甚至被当作经典，成为论述其他问题的依据。这些学者或者缺乏对中国文化传统和哲学发展的考查分析，或者不了解中国古代某些科学家的研究动机和人生情趣，特别缺乏对魏晋数学家与数学原著的深入研究。中国现代的数学工作者大多不谙中国古算，而哲学史、逻辑史工作者大多回避中国古算中

---

① A. N. 怀特海，《科学与近代世界》，商务印书馆，1959年。

② U. Libbrecht, Chinese Mathematics in the thirteenth Century, the Shu shu chiu chang of Chin Chiu-shao, Cambridge, Massachusetts and London, the MIT Press, 1973.

③ ［日］三上义夫，《中国算学之特色》，林科棠译，商务印书馆，1934年第二版。

④ 李约瑟，《中国科学技术史》（中译本）第2卷（科学思想史），科学出版社，1990年。

的科学方法论和逻辑学问题。更有一些学者妄加评论，甚至提出中国数学没有理论而根本不存在科学，也自始至终没有作纯粹理论研究的数学家等诸如此类的观点。国内数学史界前辈自钱宝琮晚年开始重视中国古代数学中的哲学问题，到严敦杰、杜石然对欧洲中心论者（或其变种）的批驳，再到近年郭书春等深入研究中国古代数学特别是魏晋数学的理论体系和刘徽的逻辑思想等，已受到国内外学者的重视。朱亚宗先生已有关于刘徽的科学主义先驱的研究[1]。

以墨家与名家为代表的先秦诸子百家学说中关于哲学抽象思辨的阐述，是中国科学价值观的最早萌芽。李约瑟博士也曾谈到了与科学发展相关的儒家、道家、法家以及后来兴起的佛教、理学的有关思想[2]。《墨经》是诸子百家中阐述自然科学理论和学说最丰富的著作，包括光学、力学、逻辑学、几何学等各方面问题。《墨经》注重抽象性和思辨性，以逻辑学作为其论说的工具，并提出了逻辑范畴的概念，他们与惠施和桓团、公孙龙等辩者相訾相应的同时，出现了名辩的高潮，强调抽象的数学思想和哲学思辨。虽然墨家和名家在后来的绝大部分时间内未曾得到重视，但魏晋时期数学家刘徽的著作里却体现了重视逻辑与推理的传统，并将其纯粹理论兴趣，升华到一种自觉的"为科学而科学"阶段。这里所说的"为科学而科学"，主要指科学的自然观和研究方法。由于历史上的科学观点和学说，都是东西方文化交流的结果，很难说是"纯西方"或"纯东方"的产物，尽管东西方科学的"范式"（包括方法、问题、范围和解答标准）不同，但它们之间是可以比较的。科学既是在某个文化系统中发生发展的必然反映，又是文化系统中一种文化的特定的表现形式，尽管近现代自然科学不是在中国最先产生的，但这并不妨碍中国传统科学思想以各种方式影响近现代科学

---

[1] 朱亚宗，中国科学主义的先驱——刘徽，载《自然辩证法研究》，1995年11卷第6期。

[2] 李约瑟，《中国科学技术史》（中译本）第3卷（数学），科学出版社，1978年。

的发展。

刘徽是中国古代卓越的数学家，他不仅是中国传统数学诸多知识和成果的创造者，同时也是中国传统数学理论的奠基者。他一方面采其所见，搜集前人和同代人研究《九章算术》的成果；一方面深入研究，"探赜之暇，遂悟其意"，写下了自己伟大的数学发现与创造，他的《九章算术注》成为盖世之作，标志着中国传统数学完成了由感性向理性、由或然性向必然性的升华，至此，中国数学在《九章算术》所构筑框架的基础上建立起了理论体系。

一、刘徽的科学研究动机、科学态度和认识论

刘徽的科学研究动机、科学态度和认识论是其"为数学而数学"科学价值观的最集中体现。刘洪向徐岳传授数学知识时即表现出脱俗超凡的气质。刘徽的数学研究也不像前辈张苍、耿寿昌那样具有功利目的，而是将自己的科学目的观升华到一个更高的超越实际应用的阶段。刘徽数学理论大部分内容已经发展到脱离经验事实，在抽象性理论并进行逻辑证明的道路上走得相当深远。

首先，刘徽在《九章算术注序》中表明他从事数学研究和创造的最直接动机：

> 徽幼习九章，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。

这十分清楚地表达了自己的研究旨趣与精神。由于他"观阴阳之割裂，总算术之根源"并不是为了实用，而是为了满足一种纯粹的学术情趣，自然在此基础上力图构筑作为数学理论体系的根深叶茂的大树：

> 事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干知，发其一端而已。

其次，刘徽十分重视数学知识的系统化和论述的逻辑性，力图将其建立在科学的基础上：

> 又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。

刘徽遵循科学规律、运用"析理以辞，解体用图"这一从事学术研究和创造的科学方法，使其构建的数学体系"约而能周，通而不黩"，完成了理论的系统化、条理化，从而使中国传统数学从或然性到必然性达到了一个更高的水平。

刘徽接着说：

> 且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。

刘徽在此将数学理论探究置于实际应用之上，并进一步阐说数学研究工作的纯学术的性质以及他对科学的态度与价值观：第一，古人赋予数学的功能是选拔教师和培养人才，而刘徽看中的是数学的"穷纤入微，探测无方"，也即其探测未知的功能。第二，刘徽认为数学的本质是客观世界的空间形式（规矩）和数量关系（度量）的统一。第三，刘徽认为数学并不神秘，是可以认识的，这就与不可知论划清了界限。第四，刘徽称精通数学者为"好之者"，而不称作"知之者"，更不称作"用之者"，这是有深刻内涵的。在注重"经世致用"的人看来，"行"重于"知"，高于"知"。而在"为科学而科学"价值体系中对科学的"好"，则高于对科学的"知"，也高于对科学的"用"，对科学的探索只是出于自己的爱好和兴趣，对科学真理的追求胜于对科学的占有，探索之外别无他求。显然，刘徽使用"好之者"，是其"为科学而科学"的自然流露[1]。

最后，刘徽对科学美的感悟和体验使其科学认识论达到最高阶段。刘徽感慨说：

> 虽夫圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造《重差》，并为注释，以究古人之

---

[1] 宋亚宗，刘徽：中国科学主义的先驱，载《科技批评史》，国防科技大学出版社，第20－39页，1995年

意，缀于《勾股》之下，……触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。

刘徽将史籍中考察天地间事物的数量关系称为"以阐世术之美"，这是刘徽的科学美学思想的写照。这里进一步印证，刘徽研究数学的目的主要是为了阐发他的方法的优美，并非完全是为了应用。刘徽在中国数学史上首次提出了数学美的概念。对数学美的重视要胜过其对应用的重视。对数学美的追求是现代科学主义价值观的重要特征之一，可以说，刘徽开创了追求数学美的科学价值观。不仅如此，刘徽推崇算法的程序化，进而提出了科学的简洁美并进而达到体验美、欣赏美的原则。他是这样描绘的：

更有异术者，庖丁解牛，游刃理间，故能历久其刃如新。夫数，犹刃也，易简用之，则动中庖丁之理，速而寡尤。

在这里，刘徽提出了数学研究中的极为重要的"易简"原则，"易简"就是简约、简洁之意。刘徽将这种思想作为化约求解过程的程序化和简洁美的追求方向。不仅如此，他还对数学研究过程的体验比喻为庖丁解牛，数学方法相当于刀刃，足见刘徽在解决数学问题探索未知世界的美的感受和超脱精神。

二、刘徽的科学方法论体系

刘徽"为数学而数学"的思想还表现在他的科学方法论体系中。

首先，在数学概念、数学公式、解法的论证方面，《周髀算经》中陈子提出了数学要"类以合类"，学习数学要做到"知一类而万事达"；《九章算术》实际上按照这种要求，抽象出近百条抽象性公式，它们成为刘徽"为数学而数学"的方法论基础。尤其是，《九章算术》提出鳖臑的体积公式，刘徽指出"鳖臑之物，不同器用"。《九章算术》所提出各种立体，大都是从土木工程、人们的日用器具中抽象出来的，惟有鳖臑这种立体，现实中没有原型，是立体分割的产物：将堑堵斜着分割，一个是阳马，一个就是鳖臑。因此鳖臑体积

公式的提出，不是实际的需要，而是数学理论的需要，带有"为数学而数学"的性质，而这些都是先秦完成的。西汉张苍、耿寿昌是不是删去了先秦的一些理论概括的内容，值得进一步研究。然而，他们增补的内容，无论是解勾股题还是解一些算术难题，都比先秦有较大的进步，但是其表达的理论水平远不如先秦已完成的部分却是不争的事实。这种情况到汉末以后，发生了根本的变化。赵爽、刘徽将两汉以来的解勾股形知识进行了高度的抽象，其理论水平远高于《九章算术》的同类内容。比如关于基本概念，刘徽定义"率"为"凡数相与者谓之率"；小数是"微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母"；正负数是"今两算得失相反，要令正负以名之"；方根是"若开之不尽为不可开，当以面命之"；面积是"凡广从相乘谓之幂"。这些基本概念、公式即由算法导出。如果说，概念、公式、解法的高度的概括使其应用范围更加广阔，还不完全是"为数学而数学"的话，那么对这些公式、解法进行严格的数学证明，进而探讨各种数学概念，各种数学方法之间的内在联系，使之形成一个体系，则完全是一种自觉的"为数学而数学"的行为。因为，从实用的观点出发，只要用许多事例验证所用的公式、解法的正确就够了，不必对之进行数学证明，因为这并不影响其应用。赵爽、刘徽证明了两汉以来的勾股命题，刘徽更是全面证明了《九章算术》的各类命题。显然，在刘徽等学者看来，无数次的验证某些命题的正确，并不能证明该命题的可靠无疑，只有用演绎逻辑证明了它，才是正确的。比如对《九章算术》提出的圆面积公式、阳马与鳖臑体积公式，刘徽便不满足于用无数个圆、阳马、鳖臑验证这些公式都是正确的。他必定作过若干次有限分割，利用出入相补原理却无法证明之，从而创造了先进的无穷小分割方法，利用极限思想完成了证明，构架起了通向微积分的桥梁[1]。显然赵爽、刘徽这类数学证明是纯数学的活动。

其次，刘徽十分重视数学思想与方法的科学归纳与应用。对

[1] 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科技出版社，第262页，1992年。

同一问题从不同的角度研究归纳出不同的解法，体现出他对"纯数学方法"的兴趣。《九章算术》有时对同一类问题给出不同的解法，如对圆的面积，便给出了四个不同的公式。但是，这四个公式是分别针对已知半周与半径、周与径、径、周这四种情况提出的，实际上是四种不同问题的四种公式。而刘徽将数学问题方法的研究达到一个新阶段。如对方亭、刍童、刍甍等多面体，在同样的已知条件下，在《九章算术》的公式之外，又归纳了另外一个或两个新的公式。以方亭为例，已知方亭的上方(a_1)、下方(a_2)及高(h)，《九章算术》给出的公式是：

术曰：上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。

此即

$$V=\frac{1}{3}(a_1a_2+a_1^2+a_2^2)h$$

刘徽又给出了一个公式：

为术又可令方差自乘，以高乘之，三而一，即四阳马也。上下方相乘，以高乘之，即中央立方及四面堑堵也。并之，以为方亭积数也。

此即

$$V=\frac{1}{3}(a_2-a_1)^2h+a_1a_2h$$

这两个公式是等价的。这两种不同形式的公式是由不同的推导方式产生的，反映出时代的差异，前者是以归纳推理为主的綦验法，后者是以演绎逻辑不主导的有限分割求和法。对有的算术问题，刘徽也提出了不同的解法，如凫雁问等同工共作类问题，在《九章算术》的方法之外，又提出了一种方法，实际上刘徽用两种不同的齐同方式，论证了这两种方法，应用齐同原理，也是灵活的。络丝问中，刘徽又在《九章算术》的方法之外提出了重今有术与三率悉通两种方法。刘徽的解法与《九章算术》的解法比较起来，有的其简便程度不分轻轩，有的更简便些，其理论水平更高。但是，在刘

徽提出的方法并不比《九章算术》的方法简便时，就说之所以提出新的方法，是为了开阔思路，寻求解决问题的不同的途径。例如在方程术中，将左行消到只有一个未知数与实的时候，《九章算术》采取相当于今天代入法的方法求其他未知数的值，而刘徽注中使用了将直除法进行到底的方法。接着刘徽指出：

则计数矣，用算繁而不省。所以别为法，约也。然犹不如自用其旧，广异法也。

在麻问中，刘徽创造了方程新术。他给出了方程术与方程新术的细草，并做了比较：

以旧术为之……如此凡用七十七算。以新术为此……如此则凡用一百二十四算也。

就是说，新术不如旧术简便。既然如此，为什么还要提出新术呢？还是为了开拓不同的解题思路。就是说，他创造新的方法，并不是为了应用，而是为了展示不同的解题途径。因此，在数学活动中，他反对"徒按本术"，反对"胶柱调瑟"，主张"设动无方"。这完全是离开实际应用的纯数学活动。

数学常数与公式的精确化，是"为数学而数学"的另一方面。《墨子》就已认识到圆的周径之比是个常数。《周髀算经》、《九章算术》实际上使用周三径一，即 $\pi=3$。同样，正方形边长与对角线之比，民间长期使用方五斜七，亦即 $\sqrt{2}=1.4$。作为近似计算方法，在天文历法的制定、土木工程及其他应用中，使用周三径一、方五斜七是可以的。正如刘徽所说：

周三径一，方五斜七，虽不正得尽理，亦可言相近耳。

事实上，这两个常数在魏晋以后的生产、生活以及一些数学著作中还长期使用，如理论水平较高的元代数学家李冶的《测圆海镜》和明末以前最精确的历法——元代郭守敬等的《授时历》中，都使用周三径一，更不论应用性特别强的《孙子算经》、《五曹算经》、《九章算法比类大全》等著作了。刘徽却要追求数学上的"尽理"，创造求精确圆周率值的科学方法，创造开方不尽时继续开方"求微数"的方法，这显然是一种"为数学而数学"的精神所驱动的行为。《九章

算术》提出的弧田术是不准确的，开立圆术是错误的，也都是近似计算的产物。对前者，刘徽说：

若但度田，取其大数，旧术为约耳。

对后者，刘徽说：

互相通补，是以九与十六之率偶与实相近，而丸犹伤多耳。

就是说，在计算田地面积及其他应用中，还是可以用《九章算术》的公式的。刘徽论证了《九章算术》的公式的错误，创造了求弧田面积的密率的方法，设计了牟合方盖，指出了解决球体积的正确途径。

最后，刘徽探讨各种数学概念、各种数学方法的内在联系，把数学知识看成一株枝条虽分而同本干的大树，看成一个完整的体系。这种认识，已是纯粹数学的行为。关于赵爽、刘徽等对数学知识的抽象，对数学命题的证明，关于数学体系的认识，已有详细论述[①]。

综上所述，重视数学知识的实际应用，是中国传统数学的重要特色。认为三国两晋数学家忽视数学与实际应用相结合，当然是不符合事实的。但是他们，尤其是刘徽，在个体自觉、思想解放的魏晋时代精神的激发下，在继承数学理论用于实际的生产、生活的同时，按照数学内部发展的需要与自己的纯学术兴趣，"析理以辞，解体用图"，探求与数学的实际应用关系不大的数学理论，取得了卓越的成就，这是强烈而自觉的"为数学而数学"的行为，表现出追求科学、欣赏科学美的人生情趣和价值观。这不仅与只重视数学的"经世致用"的两汉数学根本不同，也远高于先秦的同类思想。而在中国数学史上，在明末西方数学传入中国之前的纯粹数学活动方面，再也没有人达到刘徽的高度。

---

① 郭书春，论试刘徽的数学理论体系，载《自然辩证法通讯》，1987年第9卷第2期。并见郭书春，刘徽的体积理论，载《科学史集刊》，地质出版社，1984年第11期。

5.5 刘徽成长的思想文化背景

刘徽成长于魏晋时期。从魏晋到南北朝，是一个数学理论建树丰硕，重视证明的时代。学界一般认为，如果说战国时期是中国思想发展史上的"百家争鸣"时期，那么魏晋南北朝则是中国传统文化走向成熟的重要阶段，是第二次"百家争鸣"时期，而且在内容上要丰富和深刻得多。在这个时期，中国古典数学形成了理论体系，并得到完善和充实。可以说时代造就了杰出的刘徽。

中国封建社会经过两汉大发展，黄巾起义和群雄割据，到魏晋时期，政治、经济、文化发生了极大变化，封建社会进入了一个新的阶段。考察一下中国思想史的全过程，显而易见，魏晋南北朝是一个极富时代特色的时期，也是传统文化发生重大转折的阶段。它上承秦汉，下启隋唐，时间跨度约400年。除西晋有过短暂的统一外，国家长期处于南北对峙的分裂状态。各政权为着自身的存在和战争的需要，在建立初期大都采取一些有效的改革措施改进生产关系，促进生产的恢复和发展。因此，生产力和科学技术都有较大的发展，经济上也往往出现比较繁荣的局面。同时，当时对思想和学术的禁锢较少，有利于个人才能的自由发挥，所以从一定意义上讲对科学和文化的发展反而比较有利。同时，在这一历史时期中，儒、玄、佛、道等诸家学说，错综复杂地活跃在整个思想舞台上。这些不同的意识形态，经过冲突与较量，改造与糅合，逐渐形成了一个以儒学为主体，以佛、道二教为两翼的文化模式，奠定了中国传统文化的基本格局。

一、儒家思想的统治地位受到打击，烦琐的两汉经学和谶纬迷信已退出历史舞台，辩难之风兴起

与两汉时期相比，魏晋南北朝学术思想的显著特征，是儒家学说面临着一次又一次严重的挑战。两汉时期享有"独尊"地位的经学，是封建统治者赖以维护和巩固封建秩序的官方哲学。然而，经

过桓谭、王充等唯物主义者的批判，特别是东汉末期两次"党锢之祸"、黄巾大起义和军阀豪强混战的冲击，儒学在人们心目中已黯然失色。诸如何晏、夏侯玄、王弼等人，开始用道家的思想去解释儒学，提出了"名教本于自然"的主张，使儒学的正宗地位发生了动摇。接着，嵇康、阮籍等人，提出要"越名教而任自然"，使儒学进一步遭到人们的冷漠和鄙视。可以说，在魏晋政权交替期间，在思想领域中，儒家思想的统治地位受到打击，代之而起的是以谈三玄（《周易》、《老子》、《庄子》）为中心的辩难之风，出现了先秦百家争鸣后所未曾有过的活跃景象。名家、道家重新抬头，秦汉以来视为异端的墨家也受到了重视，思想界盛行析理。刘徽注《九章算术》的宗旨是"析理以辞，解体用图"。"析理"源于《庄子》的"析万物之理"，到魏晋则成为思想界辩难之风的要件，具有方法论的意义。显然，刘徽数学上析理与此是合拍的。刘徽和嵇康、王弼、何晏等思想家都把"简约"作为析理的原则，反对"远引繁言"，主张"举一反三"，"触类而长"，所有这些都说明刘徽深受辩难之风的影响，以至他的许多用语句法都与嵇康(224—262)、王弼(226—249)相似。

二、玄学在魏晋之际曾一度成为主要的哲学思潮

汉魏之际激烈的社会文化变动的结果之一，是魏晋玄学的产生与流行。曹魏正始年间(240—248)，何晏、王弼等研究老庄学说，以道家思想解《周易》，揭开了魏晋玄学的序幕。魏晋玄学是一个包含哲学思辨、人生价值、政治思想的复杂体系，而对玄学的历史作用与地位，历来众说纷纭，见仁见智。

罗宏曾先生在《中国魏晋南北朝思想史》中指出，如果把魏晋玄学放到中国哲学发展史上去考察，就会看到玄学家们在探讨宇宙本源的方法上，玄学独标高远，玄之又玄，但它并没有完全脱离现实，而是以道家思想去解释《周易》、《论语》等儒家学说，以证明儒家的"名教"出于道家的"自然"。这与先秦、两汉哲学家有着很大的不同。魏晋玄学一扫两汉经学那种烦琐臆说之风和武断僵陋之习，引导人们从"君权神授"、"天人感应"的神学蒙昧中解放出

来,以一种较为清醒的理性态度去思考现实,去探索人生的价值,这对于人性的觉醒起过积极作用。玄学家们已建立起自己的理论体系,形成了如有无、本末、体用、动静、言意、一多、音声、才性、名实等一系列哲学范畴概念,把思辨哲学推向空前未有的高度,为中国哲学的发展做出了历史的贡献[1]。

任继愈先生指出,玄学的内圣外王之道不为专制君主所喜,是一个无可怀疑的历史事实。由于玄学不能得到官方的认可和扶助,所以它只能在士族知识分子中间流行,而不能像汉代的经学那样上升到统治思想的地位。拿玄学与经学相比,玄学虽然在思维水平上高于经学,但在与民族文化的核心层次及心理结构的结合程度上却低于经学。这主要是因为玄学追求一种超越的精神境界,而经学则立足于人伦日用之常,玄学只能满足知识分子的精神需要,而经学则可以普及到广大的民众中去[2]。

可以肯定的是,玄学以其超越的精神境界与抽象的"辨名析理",对魏晋南北朝科学家独立精神的培养和自然科学的发展,尤其是抽象数理科学的发展,产生过重大的积极影响。魏晋玄学是影响刘徽思想的哲学背景。玄学掀起的辩难析理之风,促进了对抽象问题的探讨,大大活跃了学术气氛。这种思想界的活跃气氛在整个南北朝时期仍基本上得以延续。我国在这一时期产生了一大批早熟夙悟的政治家、军事家、科学家和艺术家,数学的发展也进入新的阶段。数学家们不仅继续创立新的数学方法,探讨新的数学课题,而且更为重要的是,引进了新的数学思想,并力图把已有的数学知识建立在必然性的基础之上。

三、唯物主义哲学发展到一个新的高度

一切科学研究都要建立在唯物主义的思想基础之上。刘徽的数学研究也不例外。刘徽注《九章》在 263 年,属三国魏朝末期。

---

[1] 罗宏曾,中国魏晋南北朝思想史,人民出版社,第 222 - 223 页,1994 年。

[2] 任继愈,中国哲学发展史(魏晋南北朝),人民出版社,第 257 页,1988 年。

因此，影响刘徽思想的哲学背景，主要应从汉魏之际与魏朝的哲学思潮去探求。

首先，两汉时期享有"独尊"地位的经学，作为封建统治者赖以维护和巩固封建秩序的官方哲学，经过东汉初年思想家桓谭、王充(公元27－约97)等唯物主义者的批判，已在人们心目中黯然失色。

王充的唯物主义哲学思想，对数学家刘徽产生了重要影响。王充继承发展了桓谭的无神论思想，其杰作《论衡》是经过30年的艰苦努力才完成的，成为东汉唯物主义哲学著作的代表。王充对封建正宗思想的唯心主义谶纬神学进行了深刻批判，他认为天地是由"元气"形成的，气充塞于天地之间，而成为万物的本源，日月星辰也都是自然物质，"系于天，随天四时转行"(《论衡·说日篇》)。王充还唯物地解释了天人关系，提出了"无鬼论"，用来解释人的"精神"与"肉体"的关系，可以说，通过桓谭、王充等唯物主义者阐述学说，东汉末年以来，两汉占统治地位的经学逐渐退出历史舞台，谶纬迷信受到冷落，儒学的统治地位被削弱了，这不仅为思想界形成远承战国时期百家争鸣的活跃气氛起了推动作用，同时也为人们正确理解自然现象，揭示自然规律，在一定程度上为科学研究提供了认识论的方向。

其次，温公颐先生在《中国逻辑史教程》中指出，王充自述"《论衡》者，所以铨轻重之言，立真伪之平"，说明该书也是关于确立一个论断、论题的真伪的标准的书，是一部包含证明和反驳的论证逻辑的论著，开汉末重证验，重思考的风气，影响到思想家王符、徐干关于名实、名理的见解，以及嵇康关于论辩的理论。据郭书春先生研究，刘徽一切论证都从事实和已经证明的结论出发，反对空言，"不有明据，辩之斯难"的思想，与王充"事莫明于有效，论莫定于有证"(《论衡·薄葬》)的思想是相通的。《论衡》全书的内容以反驳为主。刘徽《九章算术注》多次指出《九章算术》的术文不验，在反驳的运用上十分娴熟。值得注意的是，刘徽反驳《九章算术》开立圆术的错误的格式，与王充《论衡·实知篇》反驳圣人上知千古，下知

万世的格式完全一致，对此，郭书春先生作了对比研究，从而得出了结论："刘徽反驳的方式，与《论衡》有明显的承传关系。"[1]

尽管两汉的唯物哲学是一个了不起的进步，但它仍有历史的局限性。其方法毕竟还是经验论，喜好连事比类，偏重于局部的、具体的事物，难于得出揭示事物本质的结论。以王弼为代表的玄学，不仅大大拓宽了学术研究范畴，而且在辨名析理时，重视逻辑推理和抽象思维，从而使中国哲学发展到一个新的水平。后来，又有杨泉的《物理论》、鲍敬言的《无君论》，在认识论方面，范缜《神灭论》坚持唯物主义的基本原则和方法。在唯心主义泛滥的南北朝时期，特别是范缜的唯物思想和认识论，在中国思想史上享有十分荣耀的地位。

四、士人的自觉

魏晋时期不失为中国历史上一个思想解放、个体自觉的时代。自魏晋开始，儒、玄、佛、道等诸家学说相互交融和彼此消长，已成为中国思想史上人性觉醒的时代。儒家的人生哲学，在自我方面强调修身，在政治方面注重德化，在人伦方面恪守礼法，期望人生一世退可以齐家、进可以治国平天下。魏晋时代的玄学思潮，正是对儒家人生哲学的怀疑和否定。玄学家们鼓吹的是自然的个人的本性生活，反对的是违背本性的伦理化生活，希望返朴归真，回到真实的自由的生活方面去。这时的思想界已跳出儒学的窠臼，亮出了新的牌号和新的内容，并对后世产生了深远影响。因此，人性的觉醒，也是这一时代思想的新动向。

任继愈先生指出："就思想的解放程度而言，汉魏之际可以和先秦媲美，人们冲破了经学思想的束缚，对诸子之学发生了极大的兴趣，整个思想领域一片喧闹沸腾景象。"[2] 钱穆先生在其《国学概论》中也认为："魏晋南北朝三百年学术思想，亦可一言以蔽之，

---

[1] 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科技出版社，第341－344页，1992年

[2] 任继愈，中国哲学发展史（魏晋南北朝），人民出版社，第56页，1988年。

曰个人自我之觉醒"。

余英时先生指出,"论汉晋之际士大夫与其思想之变迁者,固不可不注意士之群体自觉,而尤其重要者则为个体之自觉,以其与新思潮之兴起最直接相关故也……所谓个体自觉者,即自觉为具有独立精神之个体而不与其他个体相同,并处处表现其一己独特之所在,以期为人所认识之义也"[1]。

正是在士大夫个体自觉意识高涨的氛围下,魏晋时代的思想文化显现出多元化的格局,哲学、文学、艺术与科学领域中名家辈出,新意迭见。这种思想震荡对魏晋学术风貌和知识分子的心理人格都带来很大影响:谈玄使实用不再成为学术的主要价值规范,礼法失控的结果是更多的个体自觉。这一时代的大学者也往往表现出建构理论体系的兴趣:曹操(155～220)之于军事、陆机(261～303)之于文学、顾恺之(345?～406)之于绘画、王羲之(321～379)之于书法、葛洪(281～381)之于炼丹、陶宏景(456～536)之于本草、华佗(?～208)之于外科医学、王叔和(210?～285)之于脉学、裴秀(223～271)之于地图绘制,就都是以纯学术的追求和自我完成的热情在各自专业领域建树理论的例子[2]。

在魏晋时期士之自觉的人文主义思潮影响下,数学作为积累已久的中国传统自然科学终于在魏晋时代达到一个转折点:即由以"经世致用"的实用价值观向"以阐世术之美"为旨趣的科学价值观的转变。刘徽就是最好的代表。由于他"观阴阳之割裂,总算术之根源"并不是为了实用,而是为了满足一种纯粹的学术情趣,自然在此基础上力图构筑作为数学理论体系的根深叶茂的大树——"事类相推,各有攸归,故枝条虽分而同本干知,发其一端而已"。同时,刘徽运用"析理以辞,解体用图"这一从事学术研究和创造的科学方法,使其构建的数学体系"约而能周,通而不黩",完成了理论

---

① 余英时,士与中国文化,第310～315页,上海人民出版社,1987年。

② 洪万生,重视证明的时代——魏晋南北朝的科技,中国文化新论·科技篇,台湾联经出版公司,1983年第二版。

的系统化、条理化，从而使中国传统数学从或然性到必然性达到了一个更高的水平。所有这些都充分体现了刘徽十分重视数学知识的系统化和论述的逻辑性，力图将其建立在科学的基础上之"自觉"。

5.6 齐鲁文化造就了刘徽

据数学史家郭书春先生考证，刘徽是汉文帝刘恒之子梁孝王刘武五世孙菑乡侯之后，淄乡人，其地在今山东省邹平县境。刘徽可能生于3世纪20年代后期或更晚一点，注《九章算术》时(263年)仅30岁左右。

先秦邹鲁之乡是儒家的发祥地。这样一个文化氛围，不仅对刘徽学习各种文化典籍、汲取前人优秀的文化遗产，而且对刘徽杰出的数学创造，是一个得天独厚的有利条件。

要进一步研究齐鲁文化与刘徽的关系，通过考察源远流长的齐鲁文化及其刘徽时代的发展，我们可以用已形成的三个"中心"说明。

一、齐鲁地区是早期的"学术思想最为活跃的学术研究中心"

刘徽成长在齐鲁之邦。自先秦到魏晋，齐鲁地区有着良好的文化传统，其文化发达程度一直居于全国的前列。从源远流长的齐鲁文化来看，临淄稷下学宫集中了许多著名学者。

郭书春先生对齐鲁文化的发展作了系统的研究，他认为："自先秦至魏晋，齐鲁地区文化发达，文人荟萃，是中国的文化中心之一，在中国文化史上的地位，远比南北朝之后高(尽管南北朝之后仍不失为先进地区)。邹鲁之乡，是孔孟之道的发祥地。孔孟之道后来发展为中国封建社会的正统思想，在中国正面与反面的影响极大，这是人所共知的。战国中期，齐桓公田午为了图强争霸，广泛罗致人才，在都城临淄的稷门之下设立学宫(通称稷下学宫)，用优厚的生活待遇，自由的讲学风气，招揽各方文人学士。到威王、

宣王时期，达到鼎盛……"是以齐稷下学士复盛，且数百千人。"(《史记·田仲敬完世家》)。据认为，《管子》一书即集中了稷下学派的学术成果。襄王时期，荀派儒学创始人、大思想家荀卿又入稷下学宫。稷下学宫前后绵延近150年，成为中国古代历时最为久长，学术人才最为集中，学术思想最为活跃的学术研究中心(《山东古代思想家》)。对中国学术思想发生了巨大影响，齐鲁地区的思想家在中国学术思想发端的先秦占有举足轻重的地位。

秦汉之后，齐鲁文化余胤不断，两汉经学是中国学术思想发展的重要阶段。此时所创立的注经、解经成为此后中国思想家、史学家、科学家阐发自己的思想和创造的重要形式。齐鲁地区在两汉时期出现了许多经学家和思想家。郑玄是综合今古文经学的大师，稍后的王肃(约195～256)对经学也有贡献。王肃是东海郯(今山东省郯城)人。徐干(约171～218)是汉末著名文学家、思想家。他是北海剧(今山东省昌乐县西北)人，离淄乡不远，他是建安七子之一，著《中论》，主张"学总群道"，"统其大义"，"事莫贵于有验"。仲长统(179～220)是唯物主义哲学家和进步思想家，山阳高平(今山东金乡县)人。此外，孔融(153～208)，曲阜人；刘桢(? ～217)，东平人；王粲(177～217)，高平人，也是建安七子。建安七子中有四人属齐鲁地区[1]。

二、齐鲁地区是"清谈、辩难之风的中心之一"

"清谈"、"辩难"之风，可以追溯至东汉后期，体现了民主自由的社会风气。从两汉经学到魏晋玄学，随着"清谈"、"辩难"之风兴起，老、庄为中心的玄学则开始成为思想界的主导，绝迹数百年的名、墨学说也借着谈辩风的刮起得到复苏。

"清谈"、"辩难"内容涉及自然观、人生观、天文地理、政治等。"清谈"不是漫无边际的虚谈，而是有的放矢，并且以辨析其中的哲理为目的。应该看到，"清谈"是一种活泼的和有效的思想交流方

---

① 郭书春，古代世界数学泰斗刘徽，山东科技出版社，1992年。

式，清谈的内容当然重要，但更重要的在于精神。因为"清谈"的本身，给了学术思想界以一个朝气勃勃的生机，使士人们从自己的书斋中走出来，进入一个相互辩论寻求真理的境界，一个形而上的境界。因此，清谈对于魏晋思想的觉醒，起了不可低估的作用。正是在这种良好的学术环境下，维持了数百年之久的独尊儒术格局被打破了，原来因罢黜百家而沉寂下去的诸子之学，诸如法家、道家、墨家、名家、纵横家、阴阳家等等，又都破土而出，纷纷登上学术思想舞台，出现了继战国时期以后的第二次"百家争鸣"局面。经过学术探讨、辩论和比较，士人们认定"《庄》、《老》、《周易》，总谓三玄"的玄远之学，最能适应时代的需要，也最能对宇宙、人生、社会诸问题，做出精辟的分析和深刻的回答。于是，被后人称为"玄学"的新哲学理论，遂风靡于思想界，成为时代新思潮的主流。

汉末、魏、晋期间是经学解体，辩难之风兴起，思想非常活跃的时期。齐鲁地区是辩难之风的中心之一。齐鲁之邦还出现了若干著名思想家如刘洪、徐干、仲长统、郑玄、王弼等等。他们生活在彼此辩难、相互争鸣学术气氛之中，新观点、新思想、新成果不断涌现。如东汉泰山蒙阴（今山东省蒙阴县）人刘洪，是我国古代最杰出的天文学家之一。他反对当时流行的图谶之学，特别反对在历法中以之为依据，主张实际天象的检验——"课校"的观点。刘洪曾给郑玄授乾象历，而后又有徐岳、杨伟、韩翊等人先后受业。这些人后来多成为历算名家。有确凿证据证实刘徽受到郑玄的影响很深。王弼(226－249)是山阳高平人，就是魏晋玄学的创始人、辩难大师。他的叔祖父是王粲，脉学专家王叔和也是山阳郡高平县人。

自先秦典籍至郑玄、刘洪、徐干、王弼及其他思想家对刘徽都产生了重要影响，此时的"辩难之风"对刘徽的影响，也有专门研究，此不赘述。

总之，曹魏时期，齐鲁地区是辩难之风的中心之一，这为使数学完成从偏重实践、忽视理论向既重视实践又注重理论的转化作了理论准备。汉末三国多早熟夙悟才子，许多政治家、军事家、思

想家、科学家都在20余岁就作出了大事业，刘徽也不例外。刘徽成长在齐鲁地区，为他日后注《九章算术》，在数学上做出空前杰出的伟大贡献，成为数学泰斗提供了良好的客观条件。

三、"汉末魏晋齐鲁数学中心"

《九章算术注》的出现，标志着中国古代数学理论体系的形成，刘徽是中国古代数学体系当之无愧的奠基者。数学史家郭书春先生又提出"汉末魏晋齐鲁数学中心"的观点：

> 可以说，自汉末到晋初近一个世纪中，齐鲁地区形成了一个以研究《九章算术》为主的数学中心，在中国数学史上，除11世纪上半叶以开封为中心以楚衍、贾宪为代表的数学中心，13世纪下半叶在太行山两侧的数学中心及同时的长江下游的数学中心外，汉末经魏至晋初的齐鲁数学中心是仅见的。这个中心的数学工作，自然成为刘徽注《九章算术》时采其所见的主要资料，为刘徽的数学创造打下了坚实的基础。

首先，对于数学经典《九章算术》的成书，郭书春先生指出，作为齐鲁地区文化发达的一个侧面，数学在两汉、魏、晋期间也居全国的前列。有人认为《九章算术》为齐人所作，其根据似不充分。然而，《九章算术》中提到具体地名的除长安、上林等京畿地区外，还有齐蜀。

再从研究《九章算术》的学者来说，著名数学史家李俨在《中国算学史》"第二中古期"中引《九章算术》可见一斑：

> 《九章算术》之研究，以汉代为盛。西北劳动人民也有研究，现存居延汉简中尚保存有《九章》粟米题残简一枚。《广韵》卷四"算"条称："《九章算术》汉许商，杜忠，(吴)陈炽，魏王粲(177－217)并善之。"《前汉书·律历志》录刘歆(？－公元23年)论"备数"云："其法在《算术》，宣于天下，小学是则。"赵君卿注《周髀算经》卷上，于"偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远"经文中注称："言施用

无方，曲从其事，述在《九章》。"东汉以后，迄于三国，治此者日众。唐释慧琳《大藏经音义》卷六云"刘洪（158～183）有《九章（一作京）算术》"；《后汉书》五十四称"马续（约公元90～141年时人）善《九章算术》"；又称"郑玄（127～200）通《九章算术》"；宋李昉《太平御览》卷七五四引魏王朗塞势云"东莱徐（岳）先生，素习《九章》，能为计数"；《隋书》称徐岳撰有《九章》；《晋书》称（三国时）吴中书令阚泽受刘洪《乾象法》（公元174年作）于东莱徐岳；唐徐坚（659～729）《初学记》器物部引阚泽《九章》曰："粟饭五十，粝饭七十，粺饭五十，糳饭四十八，御饭四十二。"据上文所举，则汉许商，杜忠，刘歆，刘洪，马续，郑玄，徐岳，（赵君卿）；吴阚泽，陈炽；魏王粲诸人，并治《九章》。至魏陈留王景元四年（公元263年）刘徽注《九章算术》，自此《九章》一书，始有定本。

从述提供的材料看，齐鲁地区人诸如刘洪、郑玄、徐岳、王粲都是研究《九章算术》的学者。

刘洪，字元卓，泰山蒙阴（今山东蒙阴县）人，汉鲁王之宗室，汉桓帝延熹中（158～166），以校尉应太史征，拜郎中，又升为常山长史。"检东观著作《律历记》，迁谒者，谷城门侯，会稽东部尉"。死在山阳（今山东济宁市东南一带）太守任上。他精通数学，"当世无偶"，又造《乾象历》，经过十余年考验日月运行，所论都与天象符合。3世纪的张华（232～300）对刘洪评价说："洪笃信好学，观乎六艺群书意，以为天文数术，探赜索隐，钩深致远，遂专心锐"[1]。刘洪是当时著名的数学家和天文学家，有《九章算术》之作，早已失传。刘洪的工作缘起《四分历》的研究，而在其所作《乾象历》中"多所创新，影响深远，在我国古代历法史上占有极其重要的地位"[2]。刘洪的工作影响了齐鲁大地的一批学者如郑玄、徐岳等人，由此推

---

[1] 后汉书志，第二，博物记。

[2] 陈美东，刘洪的生平，天文学成就和思想，自然科学史研究，1986年第2期。

动了齐鲁数学的研究工作。

郑玄，字康成，北海高密（今山东高密县一带）人，为东汉末年著名的学者，精通数学，对《九章算术》有研究。少年时代更是博览群书，兼精算术。他的学习主要是在太学，通《京氏易》、《公羊春秋》、《三统历》、《九章算术》，以及《礼记》等书。公元 196 年，他曾从刘洪学习《乾象历》，可以说是刘洪的学生。他在注释《周礼》时曾引"九数"的全部名称，而且说是引自郑众。郑玄注有《中候》、《乾象历》，著《天文七政论》等大量书籍[1]。

徐岳，字公河，东莱（今山东半岛东北部）人，生东汉末。徐岳在太山（泰山）向刘洪学习，成为刘洪的学生。三国前半期较为活跃。王朗（? ～228）说："余所与游处，惟东莱徐岳精通数学。"《数术记遗》现传最早的有南宋嘉定五年（1212）刊本，题"徐岳撰，汉中郡守、前司隶，甄鸾注"。书中内容主要为大数记法及 14 种算法。目前数学史界多数认为《数术记遗》的作者为徐岳，而不是甄鸾伪托。

王粲，字仲宣，山阳高平人，文学家。少年时代很受蔡邕的器重，认为王粲"有异才，吾不知也"，并且把家里的藏书全部提供给他。他博闻强记，"性善算，作《算术》，略尽其理。"[2]

总之，在公元 2 世纪至公元 3 世纪，齐鲁地区形成了一个以研究《九章算术》为主的数学中心，出现了许多著名的数学家如刘洪、徐岳、高堂隆等，不仅推动了齐鲁地区数学的研究工作，而且影响和造就了大江南北的一批学者。经学大师郑玄、文学家王粲也通数学，这就为刘徽少年在齐鲁地区师承贤哲，学习《九章算术》，成年后"采其所见"，深入研究，进行数学创造准备了丰富资料。另外，与刘徽同时受封的单飏，山阳湖陆人，公元 2 世纪在世，作过太史令，也善明天官算术。刘徽生于公元 3 世纪 20 年代下半叶，他学习数学时，刘洪、郑玄、徐岳虽相继谢世，但刘徽正是在这样的背景下脱颖而出的。

---

[1] 后汉书，卷 [illegible] 五，张曹郑列传

[2] [illegible] 国志，卷 [illegible]，魏书·王粲

第6章　贾宪的数学机械化思想

随着数学知识和方法的不断积累，我国古代的筹算技术不断发展和提高，《九章算术》开辟的数学机械化的传统也得以延续并在此基础上不断发扬，这种机械化思想发展到贾宪，已非常突出。贾宪继承了《九章算术》以来的诸多方法，扬弃了它们的不足，在算法机械化方面做出了杰出贡献。他继续《九章算术》和刘徽方向，对《九章算术》借助于题设对象或数字的术文抽象成离开题设对象的纯数学方法，使中国古算的抽象程度和一般化提高了一大步，他构造贾宪三角的增乘方求廉法、以贾宪三角为立成的立成释锁法，都是严整的、程序化较强的算法，比以往著作中的同类方法更加规范和一般化，尤其他创造的增乘开方法，则提供了一个累乘累加的机械化算法，漂亮地解决了次数高、位数多的开方问题，其程序化连同他创造的增乘方求廉法都接近尽善尽美的地步，稍加改编，即可用于电子计算机。他的其他方法也很规范，例如，贾宪对于"方程"章诸问，兼用由《九章算术》和刘徽开辟的机械化程序很强的直除法和互乘相消法。他选择解法时因题制宜，灵活多样，在系数比较复杂的诸问（如第二、四、五、六问）中，使用互乘相消法，而在系数比较简单的诸问（如第七问）中，选用直除法更显得方便、更具程序化，而且直除法消元过程中，贾宪还提出了通过进行两行以上的四则运算而避免了负数出现的方法程序，是个创举。总之，贾宪把中国古代数学的程序化思想又提高到一个新的阶段。

6.1　"贾宪三角"的构造程序和开高次方法

《孙子算经》继承了刘徽关于"除实"的改进，并采取将下法退

位的方式求减根方程，不再重布等式，使开方程序更具连续性，是一个进步。然而，因其术文都未能脱离例题的具体数字，而表现出抽象性和一般性表达不够的弱点。同时，求减根方程以《孙子》和《张丘建》比《九章算术》和刘徽的水平也有退步。另外，《九章算术》的开方算法，发展到唐代，王孝通《缉古算经》中有形如 $x^4+Bx^2=C$ 的开方，却是通过开两次平方求其正根的，这相当于作变换 $y=x^2$ 求 $y^2+By=C$ 的正根，并未见开四次方的一般程序。

到了11世纪上半叶，北宋数学家贾宪继承了《九章算术》的开方传统，并吸收了《九章算术》以来的诸多改进和方法，把开立方推广到开三次以上的高次方和解三次以上的高次方程，提出了立成释锁法和贾宪三角即开方作法本源。

贾宪的立成释锁是依据载有计算常数的算表开方的方法。这里，算表（"立成"）便是"开方作法本源"，即贾宪三角，它实际上是将整指数二项式 $(a+b)^n, n=0,1,2,\cdots$ 的展开式的系数由上到下排成的三角数表。贾宪给出了增乘方求廉法的贾宪三角造法，表现出他注重数学方法的内在联系和程序化思想的探求。

增乘方求廉法草曰（释锁求廉本源）：列所开方数（如前五乘方，列五位，隅算在外）以隅算一，自下增入前位，至首位而止（首位得六，第二位得五，第三位得四，第四位得三，下一位得二。）复以隅算如前升增，递低一位求之。（此为法草合一，草原来为小字，今置于括号中）

	第1位	第2位	第3位	第4位	第5位
1	6	↓	↓	↓	↓
1	5	15			
1	4	10	20		
1	3	6	10	15	
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1…

这是以求五乘方（即六次方）右廉为例的一般化程序，按此程序造表的要义有三：一是定位，摆成竖式，不计隅算，几乘方则列几

位；二是自下而上递加；三是每次低一位而止。比如本草五乘方造表如下，可求得 6、15、20、15、6 位即贾宪三角第七行的各廉。所有这些，我们完全可以称其为构造性的证明。

这种方法，可以推到求任意次方的各廉，即是说，可以求得任意多层的贾宪三角。因此，贾宪三角的提出，表明了贾宪已把传统的开方法推广到开任意高次方。不仅如此，这种以贾宪三角为立成的完整开方法向算法的机械化大大迈进了一步，人们以算表开方，即使不懂数学原理，也可掌握其运算程序，机械地得出结果。设对于数 A 开 n 次方，$x^n = A$，若 x 为两位数，设 $x = a + b$，(a 为十位数、b 为个位数)，则

$$
\begin{aligned}
A = x^n &= (a+b)^n \\
&= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \\
&\quad + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \\
&= a^n + (C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} b + \cdots + C_n^n b^{n-1}) b
\end{aligned}
$$

故

$$A - a^n - (C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} b + \cdots + C_n^n b^{n-1}) b = 0$$

在估算出 a 后作减法 $A - a^n$，然后以 $C_n^1 a^{n-1}$ 试除后得到 b。“立成释锁”即由开方作法本源图所提供的诸 C_n^i($i = 1, 2, \cdots, n-1$)来确定诸廉，然后“以廉乘商方”(即 $C_n^i a^{n-i} b^i$)，再“命实以除之”(即 $A - a^n - \sum C_n^i a^{n-i} b^i$)，若 x 为 3 位数或 3 位以上数，则可依照固有程序再求出第二位数后继续开方。

以《永乐大典》卷 16 344 载开立方法为例，这里摒弃了《孙子》、《张丘建》等将具体数字写入术文的缺陷，是一条抽象术文，同时开立方采用商、实、方、廉和下法的五行布算(开平方四行)，恢复了《九章算术》的传统。另外吸收刘徽以来“除实”的改进，采取方、廉法、下法退位求减根方程。

设被开方数为 A，其根的第一、二、三位得数为 a_1、a_2、a_3，则开方程序五大步骤可表述为：

商	a_1	a_1	a_1+a_2	a_1+a_2	$a_1+a_2+a_3$
实	$A-a_1^3$	$A-a_1^3$	$A-(a_1+a_2)^3$	$A-(a_1+a_2)^3$	$A-(a_1+a_2+a_3)^3$
方	a_1^2	$3a_1^2$	$3a_1^2$	$3(a_1+a_2)^2$	$3(a_1+a_2)^2$
廉	a_1	$3a_1$	$3a_1a_2$	$3(a_1+a_2)$	$3(a_1+a_2)a_3$
(隅)			a_2^3		a_3^3
下法	1	1		1	1
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

以上开立方通过查表以3、3确立各廉，开四次方查表以4、6、4确立各廉，依次类推，开n次方需通过查表以$C_n^i(i=1,2,\cdots,n-1)$确立各廉。可以说，立成释锁法才把《九章算术》的开方法发展到与现今方法无异的方法。

6.2 增乘开方法——累乘累加的机械化算法

增乘方求廉法可以直接推广到开方程序中，这就是增乘开方法，它是贾宪最重大的贡献，标志着贾宪把中国古代数学的程序化思想推进到一个新的阶段。贾宪的增乘开方法，是中算史上第一次完整的可推广到任意次方的开方程序，是开方技术的重大改进。其基本思想是：开方求得根的第一位得数后，求减根方程时，以商得数自下而上随乘随加，每次低一位而止；商得次一位后，仍以随乘随加减实，如是机械反复，直至求出最后的答案。

现以《详解》中贾宪设开四次方问题"积一百三十三万六千三百三十六尺。问为三乘方几何"为例说明之。本例题是$\sqrt[4]{1\,336\,336}$，贾宪的原文是法、草合一，此处只列出法，其程序可分成⑥步：

> ①置积为实。别置一算名曰下法，于实末常超三位约实。②上商得数。乘下法生下廉，乘下廉生上廉。乘上廉生立方。命上商，除实。③作法：商第二位得数。以

上商乘下法，入下廉，乘下廉入上廉，乘上廉入方。④又乘下法入下廉，乘下廉入上廉，又乘下法入下廉。⑤方一，上廉二，下廉三，下法四退。⑥又于上商之次续商置得数，以乘下法入廉，乘下廉入上廉，乘上廉，并为立方。命商，除实，尽，得三乘方一面之数。

它不仅是中国数学史上首次出现的增乘开四次方的程序，也是第一次直接开四次方的方法。贾宪增乘开四次方是在《九章算术》开平方、开立方、开带从平方、开带从立方等算法基础上所改进的新方法。这种方法是一种典型的机械化程序，既具体又有规律，按部就班就可以解题至终，而毋须硬记在筹算开方中所规定的系数公式。总结增乘开方法的程序步骤是：

步骤 1，缩根：目的是使方根缩小至原来的 $1/10^n$ 而仅保留一位整数。如上例令 $x=10x_1$ 得 $10\,000x_1^4=1\,336\,336$　　(*)

步骤 2，估根：试得这个整数的数值。如上例，估得 $x_1=3$

步骤 3，减根：目的是除去这个已经确定的整数。

下法（借算）	廉（中行）	方（定法）	实	商
J	M	N	A	b
	Jb	$(M+Jb)b$	$(N+(M+Jb)b)b$	
J	$M+Jb$	$N+(M+Jb)b$	$A-(N+(M+Jb)b)b$	
	Jb	$(M+2Jb)b$		
J	$M+2Jb$	$N+(2M+3Jb)b$		
	Jb			
	$M+3Jb$			
J	$M+3Jb$	$N+(2M+3Jb)b$	$A-(N+(M+Jb)b)b$	

如上例，对方程(*)作减根变换 $y=x_1-3$，得方程：

$$10\,000y^4+120\,000y^3+540\,000y^2+1080\,000y=526\,336 \qquad (**)$$

步骤4.扩根：目的是使方根剩余的部分扩大至10倍而重现一位整数。如上例，对方程(＊＊)扩根变换：$10y=y_1$ 得

$$y_1^4+120y_1^3+5400y_1^2+108\,000y_1=526\,336$$

重复以上步骤，就可逐一求出方根的各位数字来，古代开方术中的"超"、"议"、"除"、"折"分别相当于以上四大步。

以上开四次方的程序，以随乘随加代替乘方和乘积的计算，达到与立成释锁法运用贾宪三角各廉异曲同工的目的，且这种方法比从《九章算术》的开方术到立成释锁法的传统开方法简捷、整齐，因而更具有程序化，只要作好第一步布算定位，掌握退位步骤，其余的运算都是从商自下而上递乘递加，每低一位而止，这种机械化程序对开任何次方都适用，而且开方次数越高，商的位数越多，数字越大，增乘开方法越优越。

6.3 贾宪数学机械化思想的地位

就机械化思想而言，贾宪的工作是承前启后的。他一方面继承并发展了《九章算术》与刘徽开辟的数学方向和传统，在算法机械程序化方面，对《九章算术》以及《九章算术》以来的那些抽象性和一般化不够的方法和程序，进行了离开数字的抽象，扬弃了它们的不足。自从《九章算术》少广章提出开平方和开立方的方法后，一千年来，数学家都力图改善这个方法，直至贾宪才发现：在开平方和开立方中，第一次求减根方程以后的步骤都可以按照第一次减根所用的"随乘随加"的方法实现，更方便，更具程序化，这是非常关键的一步，因为有了这个方法，便可立即推广到开高次方和高次方程数值解。

另一方面，贾宪是宋元时期现在知道成就的第一位重要数学家，他的机械化思想对宋元数学发展主流产生了深远的影响。

首先，中国古算机械化的突出代表是方程，方程是贾宪的主攻方向，也是他的最重大的贡献，在他之后，众多的数学家都以方程为研究对象，贾宪的增乘开方法到南宋秦九韶发展为十分完备的

求高次方程正根的方法，对高次方程正根的研究又促进了天元术的诞生，方程理论的进步和成就成为宋元数学高潮的主要标志，蓋导源于贾宪。

其次，程序化是贾宪进行数学研究所追求的目标，这导致他的机械程序化思想突出，以其创造的增乘方求廉法和增乘开方法为代表。据郭书春先生考证，《详解九章算法》中的新术(法)均为贾宪所撰[①]。新术与原术的最大区别，在于提高了数学的一般化程度。纵观整个宋元数学，就会发现程序化是一个重要特点，这与贾宪的思想影响分不开，秦九韶的高次方程数值解法程序，甚至是增乘开方法的直接推广。

再次，贾宪为后世提供了解决数学问题的重要思维方式。这表现于他注重数学应用的基础，并进而提高数学的纯粹性和一般化程度。贾宪的开方理论在一定程度上摆脱了传统的几何思维的束缚，因为按传统的几何思维，“积”是代表面积、体积，其对应的方程分别为二次、三次，而贾宪突破了这个局限，其“积”是一个四次方，没有任何几何量(在常识意义下)与之对应。他创造的“开方作法本源图”向人们提供了一种不依赖于几何量和生活原型的纯代数模式，并企图揭示出数学的规律，朱世杰就是按表中数字的规律在六次方基础上推广到八次方，秦九韶、李冶等数学家也都是沿着这条道路继续前进，不断取得新成果的[②]。

贾宪的思想和成就是具有世界意义的。贾宪的许多计算程序不仅可以用于电子计算机，而且他的思想对今天的数学研究和教学仍具有启迪作用。

当然，贾宪的机械化思想也有局限性。他的开方法未讨论不可开的问题，更未提及刘徽求微数的思想。贾宪没有继承刘徽无

---

① 郭书春，贾宪《黄帝九章算法细草》初探，自然科学史研究，1988年，第4期。并见郭书春，贾宪的数学成就，自然辩证法通讯，第11卷，第1期，1989年。

② 秦九韶、李冶都到6次，秦九韶的方程次数最高达10次，朱世杰导出的方程高达14次。

穷小分割的思想，自然不能在此方面有所建树。另外，贾宪的方程常数项均为正，而且他只考虑方程的正根、单根，说明他的思想仍在一定程度上受到实际应用和几何思维的束缚。

6.4 "贾宪三角"的现代教育价值

一、给中学数学教学一个确切的数学史实

贾宪的"开方作法本源"图，实际上就是中学数学教育中的指数为正整数的二项式展开式的系数表，是中学数学的重要内容，因而历来在中学数学的教学中占有重要地位。这个系数表的做出，进一步从理论上证明了增乘开方法的正确性。然而，中学数学教育中长期将"贾宪三角"称为"杨辉三角"，许多中学数学教师在给学生介绍这部分史实时就是说这个三角是由杨辉给出的，这是个误区。由于贾宪的《黄帝九章算法细草》早已失传，恰恰是杨辉在自己的著作《详解九章算法》中作了征引，所以后人常把开方作法本源图称作"杨辉三角"。

左积　右隅
本积①
商除①①
平方①②①
立方①③③①
三乘①④⑥④①
四乘①⑤⑩⑩⑤①
五乘①⑥⑮⑳⑮⑥①

左袤乃积数，
右袤乃隅算，
中藏者皆廉，
以廉乘商方，
命而实除之。

贾宪"开方作法本源"图

右图是著名的"杨辉三角"目前所知的最早出处。表中"袤"字，有"袤"即古"斜"字的误文之说。但杨辉说这个图"出《释锁》算书，贾宪用此术"，故应称之为"贾宪三角"。在西方法国数学家帕斯卡(A.Pascal,1623－1662)1654 年提出与此相同的三角，但较贾宪晚将近 600 年。我国著名数学史家钱宝琮认为，贾宪提出开方作法本源图和增乘开方法是数学史上无与伦比的伟大成就之一。

二、作为数学模型方法的“贾宪三角”教学

中学数学教学中的“贾宪三角”可作为以下的数学模型：

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{n+1}^{0} \quad C_{n+1}^{1} \quad C_{n+1}^{2} \quad \cdots\cdots \quad C_{n+1}^{n} \quad C_{n+1}^{n+1}$$

关于“贾宪三角”的构造性质已有多种研究和介绍，在教学中应注意把握。比如：

(1) 对称性。每行中与首末两端等距离之数相等，即 $C_n^r = C_n^{n-r}$

(2) 递归性。除 1 以外的数都等于肩上两数之和，即 $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$

(3) 第 n 行各数之和等于 2^n，即 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

(4) 自腰上的某个 1 开始平行于腰的一条线上的连续 n 个数的和等于最后一个数斜下方的那个数，即 $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$

(5) 第 n 行各数平方和等于第 $2n$ 行中间的数，即 $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

(6) 第 n 行前 $k+1$ 个数和第 m 行后 $k+1$ 个数对应项积的和等于第 $n+m$ 行的第 $k+1$ 个数，即：

$$C_n^0 C_m^{m-k} + C_n^1 C_m^{m-k+1} + \cdots + C_n^k C_m^m = C_{n+m}^k$$

三、"贾宪三角"的应用教学举例

观察贾宪三角，各数字可连成方格网，在此基础上，教师可引导学生作如下变换：

变换(1)：若将贾宪三角绕顶点（设为 A 点）按逆时针方向旋转 45 度，观察新的方格网图，根据数字构成规律，可以设计成下面城市街道纵横图的应用问题：

例 1：某一城市的街道纵横如图 6-1，分别以东西、南北各五条路，组成方格网，行人在街道上行走，（方向规定只能由西向东，由北向南前行），某同学欲从该城市的最西北角 A 处前往东南角 B 处，试问其有多少种不同的走法？

教学展开：

① 首先让学生认真审题、观察、思考：本题是求东西、南北各五条路的情况，那么，任意 n 条路也应该会求，因而思路是向外开放的。

② 当学生难以独立解决问题时，教师作适当启发：解决该问题的方法应是向内收缩的。即从方格网最简单的情况人手，通过归纳、比较，能发现什么样的规律？

③ 能否发现与"贾宪三角"的关系？

通过学生认真思考和亲身操作实验，从中发现它实际上是贾宪三角的局部表示。其答案是 70，正好对应贾宪三角表中的 C_8^4，见图 6-2。

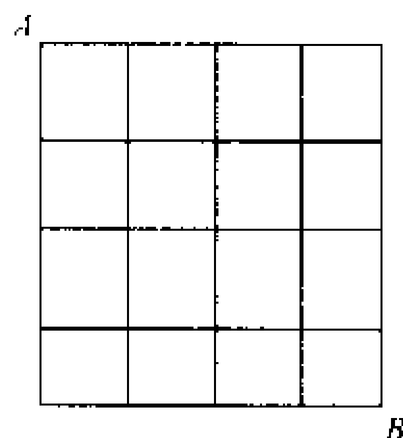


图 6-1

A	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35
1	5	15	35	70

B

图 6-2

(1) 将题目作进一步开放成一般情形：设东西、南北各有 n 条和 m 条路，从城市的最西北角 A 处前往东南角 B 处.(只能由西向东，由北向南前行)，问共有多少种不同的走法？

变换(2)：将以上方格网放在平面直角坐标系中，并将网数扩大到一般字母，网上的每个格点对应着一个坐标，这样老师可提出如下解析几何问题：

图 6-3

例 2：设 $P(n,m)$ 为第一象限内的任意一个格点，从原点 O 出发到 P 点的递增线路有多少条？如图 6-3 所示，答案是 C_{n+m}^{m} 或 C_{n+m}^{n}。

变换(3)：若将"贾宪三角"补上第一行 1，并以此为准向左看齐，可得到下图表：

F_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
……………………………………………

C_{n+1}^{0} C_{n+1}^{1} C_{n+1}^{2} ………… C_{n+1}^{n} C_{n+1}^{n+1}

在以上三角数表中，贾宪三角的第 n 行由左边的 1 为起点画一条线与水平方向成 45 度的角，这条线上所经过的数的和就是著

名的斐波那契数列的第 n 项，即 $C_0^0, C_1^0, C_2^0 + C_1^1, C_3^0 + C_2^1, C_4^0 + C_3^1 + C_2^2$，……恰好是斐波那契数列的各项，满足 $F_0 = F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geq 2)$。例如，在上图表中，有 $F_8 = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34$，这就是贾宪三角与斐波那契数列的关系。

第7章　秦九韶对数学方法程序化的追求

7.1　对一般数字高次方程解法程序的完备

增乘开方的算法不单限于开高次方，还可用于数值解高次方程，祖冲之求解负系数方程的资料已佚。现存史料中，第一次突破方程系数为正的限制的是12世纪北宋数学家刘益（公元1080年左右）。杨辉《田亩比类乘除捷法》卷下引用了他《议古根源》中的22个问题。刘益对方程理论的贡献不仅表现在用演段法列方程，而且表现在解方程。他的正负开方术比贾宪的增乘开方法更具有一般性。贾宪的方程都是 $x^n = B$ 的特殊形式（B 为正有理数），刘益则突破了首项为1和未知数系数为正的限制，已经可以求解一般的高次方程，并不拘系数正负，他讨论了诸如下列形式的方程的解法：

$$7x^2 = 9072$$

$$x^2 - 12x = 864$$

$$-5x^4 + 52x^3 + 128x^2 - 4096$$

例如 $-5x^4 + 52x^3 + 128x^2 = 4096$（《田亩比类乘除捷法》卷下第23题），杨辉称之为"实冠前古"，"前古之所未闻也"。刘益把传统的开带从平方法推广到负方（一次项系数为负）和"益隅"（二次项系数为负）两种类型，并创造了"益积"和"减从"两种开方术求负系数方程的正根。这两种方法虽还不是增乘方法，但后者与增乘开方法比较接近。刘益的工作奠定了高次方程数值解法的基础。他书中关于负系数四次方程：$-5x^4 + 52x^3 + 128x^2 = 4096$（$x = 4$），这可以算是把"增乘开方"法推广至一般高次方程解法最初的

例子[1]. 用现代的符号和语言来略点一下增乘开方法应用于高次方程数值解的步骤，用以体察一下“随乘随加”程式之整齐和简便：

	-5	$+52$	$+128$	$+0$	4096
+)		-20	$+128$	$+1024$	4096
	5	$+32$	$+256$	$+1024$	0

如上面所示，先分离出方程系数，初商4，于是随乘随加，依次进行了如下各步运算：$(-5)\times 4 = 20$

$$52 + (\quad 20) = 32$$

$$32 \times 4 = 128,\ 128 + 128 = 256$$

$$256 \times 4 = 1024,\ 0 + 1024 = 1024$$

$$1024 \times 4 = 4096,\quad 4096 + 4096 = 0$$

至此得到方程的一个正根为4。但遗憾的是，刘益在解方程时，并未考虑负数解的情况。

南宋秦九韶提出正负开方术，把以增乘开方为主导的高次方程数值解法发展到十分完备的境地。《数书九章》在有关各题术文后附详细演草，显示出我国古代数值解方程确是井然有序的，《数书九章》中的方程，系数有正有负，有整数有小数，次数最高达10次，这远远超过了实际的需要，秦九韶为把“随乘随加”进行彻底，规定“实常为负”，将实与其他各项放在一起，组成一般的开方式，这相当于一个n次数字方程：

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0, a_n < 0)$$

如前所述，在增乘开方法中，在减根和求减根方程时，都是用“随乘随加”的方法进行的，只有在减根的最后一步，即用商所得的根乘法从实中减去这一步是用减法。秦九韶规定“实常为负”以后，整个算法便全部实现“随乘随加”了。这一点，表面上看起来十分简单，实际上反映了中国古代数学家追求算法规范化的思想。从传统开方法到增乘开方法到秦九韶规定实恒为负，这一个具体算法的

---

1 钱宝琮.中国数学史.科学出版社.第156页.1964年.

例子反映了中国古代数学家实现算法程序化的过程[1]。

筹式布置从上到下为实(a_n)，方(a_{n-1})，上廉(a_{n-2})，……，$n-1$ 廉(a_1)，隅(a_0)，解法程序是机械化的。在草文中多次显示其在运算中先经过缩根，使新方程的根 x 的整数部分 $[x]$ 是个位数，然后估计这个 $[x]$；再根据 $y = x - [x]$ 做减根变换，相当于当今综合除法，得到关于 y 的新方程，再次扩根(10 倍)、估根、减根…… 如此机械反复，直至求得各位得数。

以《数书九章》卷五第 1 题"尖田求积"为例说明其程序，当列出相当于 $x^4 + 763\,200x^2 - 40\,642\,560\,000 = 0$ 的筹算表达式后，依次记录筹算正负开方过程共 21 幅图式，图下列术文，根据其术文并改用横式(以阿拉伯数字代替)编成相应的程序(见 116 页表)。

总结以上秦九韶的算法程序，可以看出，要求一般的多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0, a_0 < 0)$$

的值，秦九韶的算法的特点在于：通过反复计算 n 个一次式，逐步得到 n 次多项式的值，方法相当于现代解法中，从 $P(x)$ 的前 n 项提出 x，则有

$$P(x) = (a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)x + a_0$$

这样，括号内得到的是一个次多项式，再对括号内施行同样的程序，又有

$$P(x) = ((a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0$$

每进行一步程序，最内层多项式降低一次，最终得到

$$P(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0$$

于是利用此式结构上的特点，从里到外一层层地计算，每一层都要计算一个一次式，即外面一层总是等于里面一层的结果乘 x 再加上某一常数。此计算过程可用递推式表示为：

$$S_0 = a_n$$

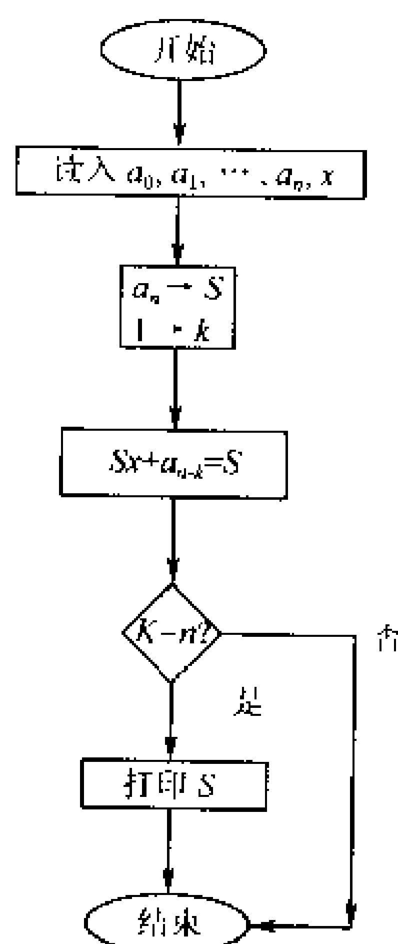
---

[1] 梅荣照，贾宪的增乘开方法，自然科学史研究，1989 年第 1 期。

程序	隅	下廉	上廉	方	实	商
缩根	−1	0	763 200	0	−40 642 560 000	
议所	10 000	0	76 320 000	0	40 642 560 000	
得	−100 000 000	0	7 632 000 000	0	−40 642 560 000	800
	−100 000 000	−800 000 000	1 232 000 000	9 856 000 000	38 205 440 000	800
减根	−100 000 000	1 600 000 000	11 568 000 000	−82 688 000 000	38 205 440 000	800
	100 000 000	−2 400 000 000	30 768 000 000	−82 688 000 000	38 205 440 000	800
	−100 000 000	−3 200 000 000	−30 768 000 000	−82 688 000 000	38 205 440 000	800
扩根	−10 000	−3 200 000	−307 680 000	−826 800 000	38 205 440 000	840
适尽	−10 000	−3 240 000	−320 640 000	−9 551 360 000	0	840

$$S_k = S_{k-1}x + a_{n-k} \quad k = 1,2,3,\cdots,n$$

此程序框图可表示为：



秦九韶的这种算法，与通常自然的算法，即直接逐项求和，至少要做 $2n$ 次乘法的大计算量相比，不仅结构简单，而且计算量也可省下一半。整个运算程式，可以用计算机的框图清楚地描述出来。显然，秦九韶方法不仅适合筹算也适合上机计算，而且是公认的优秀的算法，闪烁着中华数学的光辉。

在开方所得为无理根时，秦九韶继承和发扬了刘徽首创的继续开方不断求"微数"的思想方法，用十进小数作为无理根的近似值。这套方法把高次方程数值解的方法推进到一个更高更美的新高峰。在欧洲，英国人霍纳在 1819 年才创造了类似的方法，比秦九韶晚了 572 年。

正负开方术作为《数书九章》的杰出成果之一，已远远超出《九章算术》开平方、开立方的范围而成为求解高次方程正根的一般方法，但就其数学原理而言，二者又完全相同，从这一点出发可

以认为，正负开方术是把贾宪的开方术原理推广到开高次方并改善计算程序的结果。"从《九章算术》中开平、立方发展至宋元时期增乘开方法与正负开方术求方程数值解法，是中国古代数学构造性与机械化思想方法的又一代表性成就。"[1]我国创立的高次方程数值解法，这项成就不仅在当时的世界上是领先的，而且对后世的影响也极其深远，直到今天，计算数学中求代数方程的数值解时，还盛行着程序整齐、运算简便的秦九韶方法。吴文俊教授曾用一种HP25型的袖珍计算器就一般的高次方程对我国宋代古法作了检验，他利用这种HP25的8个存储单元编一个小程序解高至5次的方程，用这一方法求方程实解所依据的原理，从计算过程即已完全清楚，已可不证自明，而且所得结果是绝对精确的（指到预定精度而言）。

解高次方程的方法被后世继承并发展，李冶和朱世杰的高次开方法与秦九韶大同小异，李冶已没有"实常为负"的限制，各项系数都可正可负，他和朱世杰又都创立"连枝同体术"（又叫"之分法"）来处理开方式的有理数根，使增乘开方法更具普遍性和灵活性[2]。

在以上这些算法的机械化过程中，充分表现出中国古人的聪明才智，也充分体现出一代代中国人不倦地钻研计算技术，不断地提高数字计算的速度和精度以及巧妙地利用演算中的对称性和循环性所取得的丰富成果和高超技艺。

7.2 建立一般线性方程组严整规范的算法

秦九韶追求数学方法程序化的思想还表现在他对线性方程组及其解法的代数研究。这是在《九章算术》"方程"算法机械化基础

---

① 吴文俊，从《数书九章》看中国传统数学的构造性和机械化特色，秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，第77页，1987年。

② 钱宝琮，增乘开方法的历史发展，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年。

上的继承，又有所发展。仍以分离系数法建构方程的传统（今称增广矩阵），只是“积”在上，物数（未知数系数）在下，对于分数作为系数，先通过去分母，各行化约后变成最简方程组，并尽可能将各行诸数化为相与之率，反复实施“化约 — 互乘 — 相消 — 化约”的机械化步骤，直至获得最终结果（今称化系数矩阵为单位矩阵）。消元过程中出现负数时，先求其“适等”，再“直加”相消。

例如，《数书九章》卷十七的“均货推本”题，本题突出体现秦九韶“互乘相消法”解线性方程组之精妙构想。如果用现代设未知数的方法，则相当于列出线性方程组：

$$\begin{cases} 52x + 58\frac{1}{3}w = 106\ 000 \\ 15x + 1670y = 106\ 000 \\ 800y + 264z = 106\ 000 \\ 40z + 200w = 106\ 000 \end{cases}$$

秦氏草文完整，计图 15 幅，完整保留消元步骤。今略而言之，重点述以程序化过程。

(1) 先以系数增广矩阵形式布以筹算（今代之以阿拉伯数字），称为“首图”：

	左行	次行	副行	右行
首图	106000	106000	106000	106000
	$58\frac{1}{3}$	0	0	200
	0	0	264	40
	0	1670	800	0
	52	15	0	0

(2) 去分母，各行再除以该行的最大公约数，得“定率图”，实际上是最简方程组，这是各图中最重要的一个，列筹式时必须单独存放，就像放入存贮器一样，以备取用。

(3) 消元时，秦氏先以左行 × 3 和次行 × 156 的互乘相消法，消去次行最下端的度牒，然后，秦氏又十分注意方程的还原，立即

把左行还原成定率图中的最简形式。得商图。

(4) 消元过程中出现负数,秦氏采取以正补之,因"其数不等",故"先以右金五约次金五百二十五,得一百五,以乘商图右行"……"与次行之金负适等,即用右行直加次行 …… 而成政图"。

(5) 进而要消去次行盐 105,以"副、次两行盐数三十三与一百五求等,得三,故以三约三十三得一十一以乘次行,又以三约一百五得三十五以乘副行,毕。" 再"以副行减次行 …… 既毕 …… 列为宫图。"

(6) 宫图次行只有法与实,"实如法而一" 可得一未知数值,成"下图"。

(7) 反复施以化约 — 遍乘 — 相消 — 化约步骤分别求出其余的每一未知数,可得终图(系数单位矩阵)。

	左	次	副	右
	1500	50	250	480
	0	0	0	金 1
终图	0	0	盐 1	0
	0	银 1	0	0
	度牒 1	0	0	0

本例与《数书九章》第十七卷第一题的解题程序一样,都是机械化的。从计算量来说,这种算法不一定是最合理的,如本例要消去率图次行最下端数,就可直接用次行 × 52 消减左行,无须互乘相消。再如,通过遍乘行行相消会比实施行的化约后相消方便得多,但秦氏总是不厌其烦地反复采用化约后相消,严格按"化约 — 互乘 — 相消 — 化约" 的步骤,充分体现了秦氏企图建立严整规范统一的算法从而通过有规律的机械化程序方法得到规范解的思想,这是对中国古代"方程" 算法构造性和机械化的进一步发展。

7.3 秦九韶一次同余式组完整解法程序的建立

秦九韶追求数学方法程序的思想不仅表现在他的代数工作,

而且表现在他的大衍术。秦九韶大衍总数术不仅是我国数学史上的一项伟大成就，同时又是我国古代数学机械化思想方法运用的又一个范例，它总结了历法制定中计算上元积年的方法，在《孙子算经》物不知数解法基础上，首先建立了一套完整的、一般的一次同余式组解法程序。可以说，秦氏的大衍总数术几乎达到了统一的机械化算法的要求。

秦九韶大衍总数术讨论多个一次同余式的联立求解问题：

$$N \equiv R_i (\bmod A_i) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (*)$$

其中问题的原始数据 A_i、R_i 来源于实践，其情况复杂多样。大衍总数术的整个演算程序包括三大步骤：

步骤一：将问题数据标准化，即把非两两互素的模数化为两两互素的方法，使一组问数 $\{A_i\}$ 化为满足以下条件的 $\{a_i\}$：

(1) $a_i \mid A_i$

(2) a_i 中两两互素即 $(a_i, a_j) = 1 \quad (\forall i, j, i \neq j)$

(3) 诸 a_i 之积是 A_i 的最小公倍数即

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$$

这样就得到与原同余式组（*）等价的同余式组：

$$N \equiv r_i (\bmod a_i) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad (**)$$

秦氏将适合以上条件的一组模数 $\{a_i\}$ 称为定数或定母。

步骤二：对于上述（**）式，设法找到一组正整数 k_i 使得：

$$K_i \cdot \frac{M}{a_i} \equiv 1 (\bmod a_i) \text{ 其中 } M = a_1 a_2 \cdots a_n$$

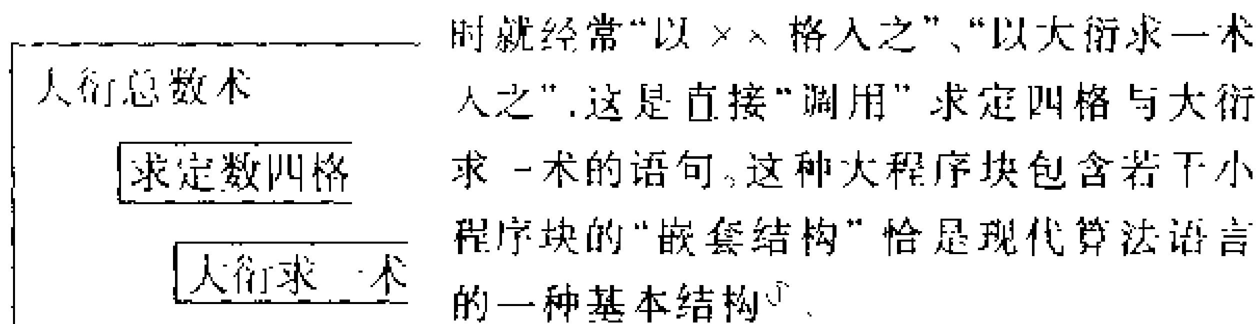
此即大衍求一术。

步骤三：$N \equiv \sum_{i=1}^{n} r_i k_i \frac{M}{a_i} (\bmod M) \quad i = 1,2,\cdots,n$

或 $N \equiv \sum_{i=1}^{n} r_i k_i \frac{M}{a_i} - pM$ （p 为正整数，其可使 N 成为最小正数）

秦九韶的总程序包含了若干子程序，主要有求定数的程序（秦

氏对四种模数——元数、收数、通数和复数的每一种分别设计了计算定数的专门程序，并用一个新的术语"格"称呼这些子程序，"格"即是子程序）和求乘率的"大衍求一术"，可用右图表示，其中子程序本身可以看做是一个完整的程序，秦氏在计算大衍类问题时就经常"以××格入之"、"以大衍求一术入之"，这是直接"调用"求定四格与大衍求一术的语句。这种大程序块包含若干小程序块的"嵌套结构"恰是现代算法语言的一种基本结构①。



一、求定数算法的机械化

大衍术的首要步骤是把一组问数 $\{A_i\}$ 化为相应的一组定数 $\{a_i\}$，秦九韶所设计的求定数演算并几乎达到统一的机械化算法的要求。

秦九韶首先定义了四类问数（模数）即元数、收数、通数和复数分别表示问数的正整数、小数、分数和问数为 10 的倍数，以此为基础，给出了把各类问数化为定数的化约方法，最终归纳为元数格和复数格的计算，从而形成一套严整的大衍术机械化程序。

化问数为定数的基本方法是："两两连环求等，约奇弗约偶。"这种方法适用于任何元数，故称为元数格算法。关于秦氏"奇"、"偶"两字的含义，国内数学史界尚无定论，论著很多。笔者的管见是：秦九韶所谓"奇"与"偶"，并非指"奇数"、"偶数"，或"单数"、"双数"，也不是表示"一"与"多"的对应。他把元数分为奇偶，目的是确定化约程序的先后次序原则，以提高算法本身的机械化程度。从大衍九问演草可见，对每一算例的元数，秦氏或假定首位数为"偶"，其余各个数为"奇"，或假定末位数为"偶"，其余各个数为"奇"，无一例外。从算法机械化的角度来看，这种假定的作用完全一样，而问题的关键是，作每一次假定后，化约程序都要遵循这一

① 李文林，论古代与中世纪的中国算法，数学史研究论文集，第二辑。

假定，只有这样，才能使整个化约过程有条不紊地进行下去。事实上，秦九韶在化约时，先对每个数定一个“号位”，即有序的存数的单元，运算则在各号位之间进行，“号位”上的数字可依中间运算结果而变化。这种“号位”很类似于计算机中的存储单元，适于机械化的运算。如果是将 n 个问数化为定数，秦氏把化约过程分为 $(n-1)$ 变，按顺序依次进行：

一变：以 A_n 依次与 $A_{n-1}, A_{n-2}, \cdots, A_1$ 求等相约；

二变：以 A_{n-1} 依次与 $A_{n-2}, A_{n-3}, \cdots, A_1$ 求等相约；

……

k 变：以 A_{n-k+1} 依次与 $A_{n-k}, A_{n-k-1}, \cdots, A_1$ 求等相约；

……

$n-1$ 变：A_2 与 A_1 求等化约。

在 k 变中，假定元数 A_{n-k+1} 为“偶”，其余的元数 A_{n-k}，$A_{n-k-1}, \cdots, A_1$ 均为“奇”，所谓“约奇弗约偶”，即用等数不约 A_{n-k+1}，而约 $A_j (j < n-k+1)$；若约后不互素，则“约偶弗约奇”，称为反约，使二者互素，依次类推，保证化约的工作递次进行

《数书九章》大衍类第八题“积尺寻源”，秦九韶“假八音为号位”，其顺序从大到小是：A_1(金) = 130；A_2(石) = 120；A_3(丝) = 110；A_4(竹) = 100；A_5(匏) = 60；A_6(土) = 50；A_7(革) = 25；A_8(木) = 20。演算为七变，其化约过程如下：

问数	一变	二变	三变	四变	五变	六变	七变	定数
A_1 130	130	26	26	26	26	26	13	13
A_2 120 反	120	24	8	8	8	8	8	8
A_3 110	55	11	11	11	11	11		11
A_4 100	25	1	1	1	1			1
A_5 60	15	3	3	3				3
A_6 50	25	1	1					1
A_7 25 反	25	25						25
A_8 20	4，1							1

在实施约奇弗约偶法时，会有正约、反约都不互素的特殊情况，“或皆约而犹有类数存”。秦氏仍采用正约，而“姑置之，俟与其他约遍，而后乃与姑置者求等约之”。（这里“类数”指含公因子的数，“等”指最大公约数），然后施以另一种化约方法——复乘法：“约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，复乘奇。”因为前步正约时已约去两数的最大公约数，再施以复乘既能保证约后各数乘积为原元数的最小公倍数，又能达到两两互素的目的。

按照约奇弗约偶的程序和复乘法程序，可把任意元数化为定数。对有公因子的一组元数，秦九韶说：“或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰复数，以复数格入之。”“皆不尽类”即总等 $d = (A_1, A_2, \cdots, A_n) \neq 1$。复数格的基本算法是：“以诸数求总等，存一位，约众位，两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，复乘奇。皆续等下用之。”即以等数约各数，但要保留一数不约，所得元数按元数格算法进行。

二、大衍求一术程序框图

大衍术把问数化为定数之后，便实现了模数两两互素，问数已标准化，正整数 N 已满足了同余式组：$N \equiv r_i (\bmod a_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，其中 r_i，a_i 皆为正整数，接下来的工作就是大衍总数术的第二大步骤，即对于满足上式的 N，设法找到一组正整数 k_i（秦称为乘率），使得

$$k_i \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{a_i} \equiv 1 (\bmod a_i)$$

秦九韶同样提出了完整的程序

(1) 求衍母 M：“以定相乘。”即 $M = \prod_{i=1}^{n} a_i$。

(2) 求衍数：“以各定约衍母。”即 M/a_i。

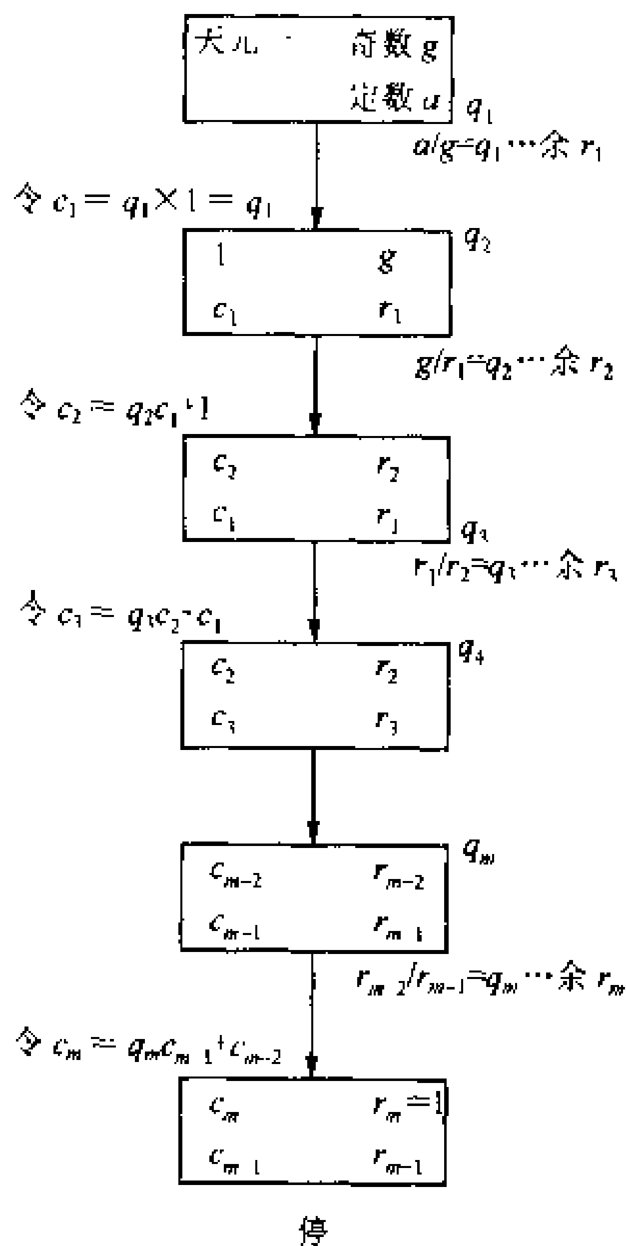
(3) 求奇数 g_i：“诸衍数，各满定母，去之，不满曰奇。”即 g_i 为用 a_i 去除 M/a_i 所得余数。

(4) 求乘率 k_i，使 $k_i \cdot g_i \equiv 1(\mathrm{mod}\,a_i)$，因 $g_i \equiv \frac{M}{a_i}(\mathrm{mod}\,a_i)$。故 k_i 必满足：

$$k_i \cdot \frac{M}{a_i} \equiv 1(\mathrm{mod}\,a_i)$$

秦九韶"用大衍求一入之，以求乘率"，他给出了一般的找乘率 k_i 的机械化方法 —— 大衍求一术。

程序	大衍求一术云
1	置奇右上，定居右下， 立天元一于左上。
2	先以右上除右下， 所得商数与左上 一相生，入左下。
3	然后乃以右行上下， 以少除多， 递互除之，所得商数， 随即递互累乘，归左行 上下， ……
m	……
$m+1$	须使右上末后 奇一而止。
乘率 $k=c_m$	乃验左上所得 以为乘率



《数书九章》前两卷共九题都要用大衍求一术求乘率，如"治历演记"问，需要求满足

$k \cdot 79 \equiv 1(\mathrm{mod}\,325)$ 的乘率 k，其程序共四步如下

(1) $325 = 79 \times 4 + 9 \quad q_1 = 4, r_1 = 9, c_1 = q_1 = 4$

(2) $79 = 9 \times 8 + 7 \quad q_2 = 8, r_2 = 7, c_2 = q_2 c_1 + 1 = 33$

(3) $9 = 7 \times 1 + 2 \quad q_3 = 1, r_3 = 2, c_3 = q_3 c_2 + c_1 = 37$

(4) $7 = 2 \times 3 + 1 \quad q_4 = 3, r_4 = 1, c_4 = q_4 c_3 + c_2 = 144$

因为 $r_4 = 1$ 且 4 为偶数，故 $k = c_4 = 144$ 演算细草如下：

$$\text{大元}\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 79 \\ & 325 \\ \hline\end{array} \rightarrow c_1\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 79 \\ 4 & 9 \\ \hline\end{array} \rightarrow c_2\begin{array}{|cc|}\hline 33 & 7 \\ 1 & 9 \\ \hline\end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow c_3\begin{array}{|cc|}\hline 33 & 7 \\ 37 & 2 \\ \hline\end{array} \rightarrow c_4\begin{array}{|cc|}\hline 144 & 1 \\ 37 & 2 \\ \hline\end{array} \rightarrow \text{止}$$

本例中 325 为定数，79 为奇数，如果定数和奇数更大，经过上述四步运算仍不能使 $r_4 = 1$，则需要按以上程序步骤继续进行，直到 $r_n = 1$，且 n 为偶数为止。可见《数书九章》卷一"推计土功"题，推算满足：

$$k \cdot 20 \equiv 1 (\mathrm{mod} 27)$$

的乘率 k 的过程共四步，步骤如下：

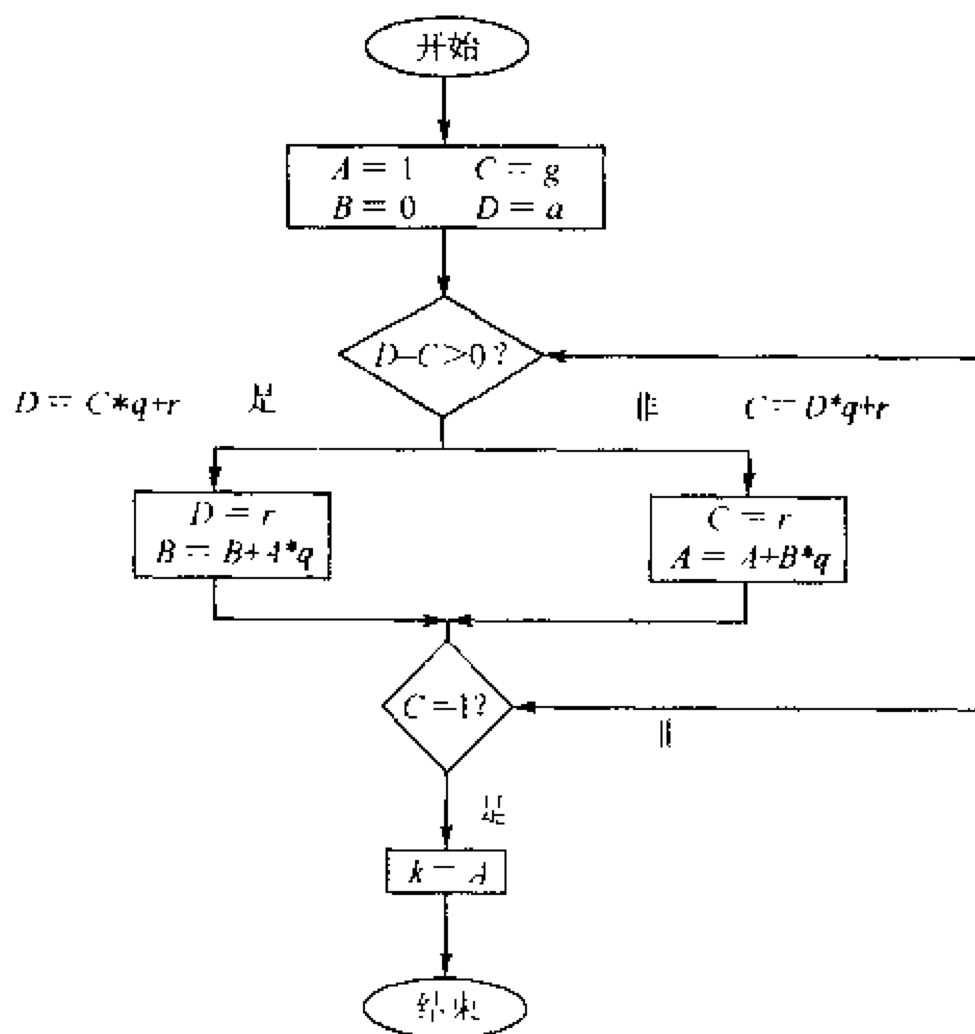
$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 20 \\ 0 & 27 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 20 \\ 1 & 7 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 3 & 6 \\ 1 & 7 \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 4 & 6 \\ 3 & 1 \\ \hline\end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{|cc|}\hline 23 & 1 \\ 4 & 1 \\ \hline\end{array} \rightarrow \text{止}$$

当数据十分庞大时，也能很好地彻底解决，且原理简浅，不用多加辞费，易于操作，亦可算理结合。

以上以大衍求一术求诸乘率 k_i 的方法，是大衍总数术的核心。此程序以奇、定二数求乘率，按辗转相除原理依次进行，不仅包含了下列形式的条件语句："IF S1 GO TO S2，IF S2 GO TO S3"，而且利用了算法具有循环、递归的性质。术文仅用 98 个字，简明叙述了这一完整算法，其中包括布算列式、初始条件、循环递归

程序、结束条件以及对算法特殊情形的注解等在内的全部演算程序，尤其以两个“递互”构成的“循环语句”，把这一递归算法概括得简明而完整。“大衍求一术”是我国古代数学构造性与机械化思想方法的又一范例。李文林、袁向东分析了秦九韶的大衍求一术，认为他的算法是完全确定的，算法对一类问题适用，算法是有效的，“即在适当初始条件下，经指令限定的有限步运算，必能得到所要求的结果”，这三个特点正好满足现代算法理论对算法的要求。整个算法几乎可以一字不差地搬到现代计算机上去实现[①]。根据术文，刘钝先生曾给出现代形式的程序框图[②]：



乘率 k，求出后，接下来的工作就是：

---

① 李文林、袁向东. 中国古代不定分析若干问题探讨. 科技史文集, 第8辑. 上海科技出版社, 1982年

② 刘钝. 大哉言数. 辽宁教育出版社, 第277页, 1993年

(5) 求正用数：$k_i \dfrac{M}{a_i}$

(6) 求各总：$k_i \dfrac{M}{a_i} r_i$

(7) 并总：$\sum_{i=1}^{n} k_i \dfrac{M}{a_i} r_i$（以下简记为 $\sum$）

(8) 求率数 N，“满衍母去之，不满为所求率数”。即是说，若 $\sum < M$，$\sum$ 即为 N；若 $\sum > M$，则从 $\sum$ 中依次减去 M，直至不满 M 为止。

即 $$N = \sum - pM$$

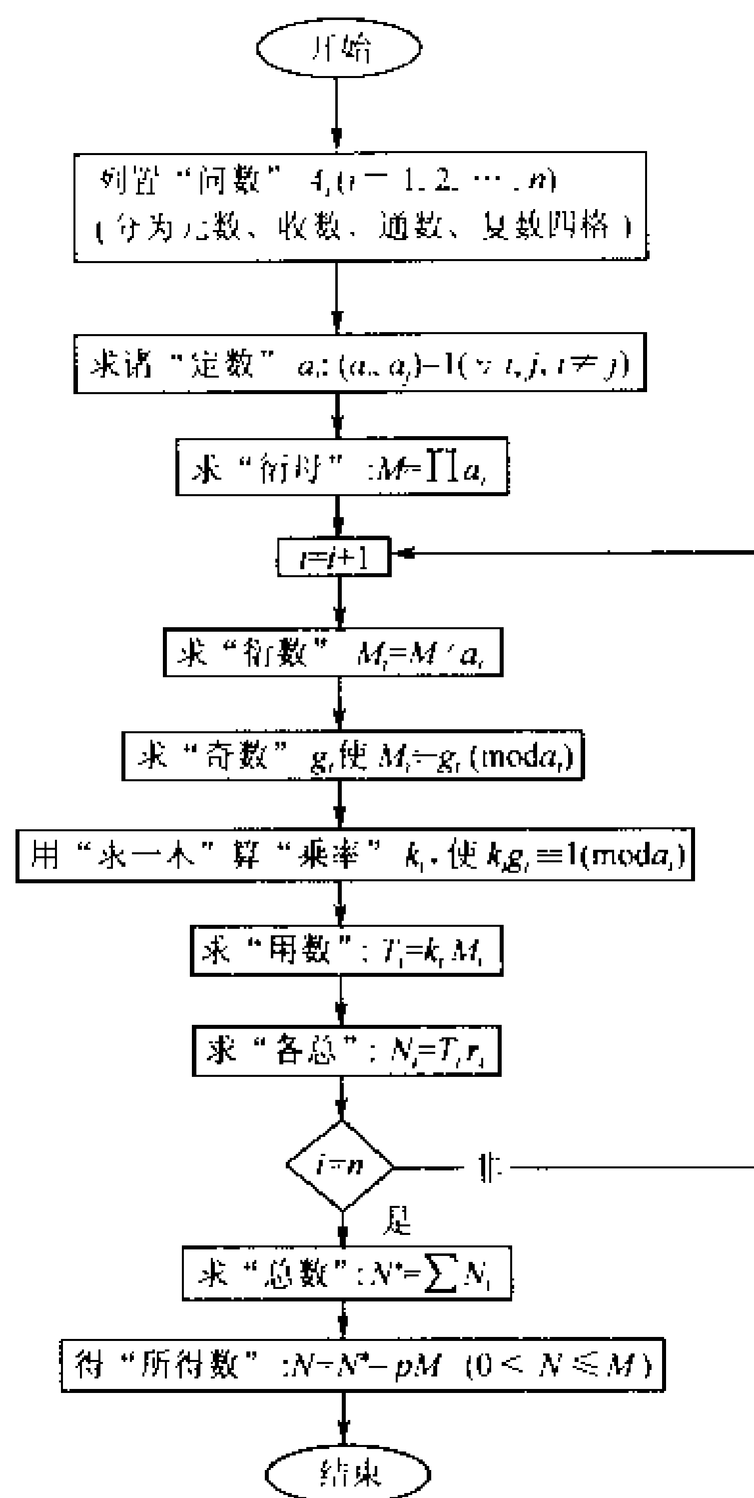
诚然，秦九韶大衍总数术在中国古代算法中是很成功的，其中包含着算法程序设计的许多基本方法和技巧，它们和现代电子计算机计算的程序设计在原理上是相通的，其算法也完全符合现代算法的要求。我们可以仿照现代程序设计的记号与图式将秦氏大衍术算法译成“程序框图”。

“大衍总数术”程序框图是由多重循环语句和分支结构组成的，并广泛采用了“子程序”的方法，它标志着中国古代筹算算法设计的成熟，正是这种高度的机械化的算法得以处理诸如大衍术这样一类的非常复杂的问题。

下面以《数书九章》中余米推数题为例，对大衍总数术的完整程序作以说明。该题是一件关于盗窃案的侦破术，原题为：

> 问：有米铺，诉被盗去米一般三箩，皆适满，不记细数。今左壁箩剩一合，中间箩剩一升四合，右壁箩剩一合。后获贼，系甲、乙、丙三名。甲称当夜摸得马杓，在左壁箩，满舀入布袋；乙称踢着木履，在中箩，舀入袋；丙称摸到漆碗，在右壁箩，舀入袋，将归食用。日久不知数。索得三器，马杓满容一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合。欲知所失米数，计赃结断三盗各几何。

解决此问题，关键是要利用三箩所剩米数和三器的容量，依据大衍总数术分条列出，可归于解三元一次同余式方程组。



已知：剩米 $r_i = 1,14,1$(合)；器容 $a_i = 19,17,12$(合)。求：每箩米 $N = r_i(\mathrm{mod}\, a_i)$

> 术曰：以大衍术求之。列三器所容，为元数；连环求等，约为定母；以相乘，为衍母；以定各约衍母，得衍数；各满定母，去之，得奇；以奇定，用大衍，求得乘率；以乘衍数，得用数。次以剩米乘用，并之，为总；满衍母，去之，不

满，为每箩米 各以剩米减之，余为甲乙丙盗米、并之为共失米

依据术文，今以合为单位，不难看出，每箩米数满足同余式

$$N \equiv 1 \bmod(19) \equiv 14 \bmod(17) \equiv 1(\bmod 12)$$

(1) 求定数 a_i，由于 19，17，12 互素，便为定数，这就省去了化约求定数的这一程序。$a_1 = 19, a_2 = 17, a_3 = 12$

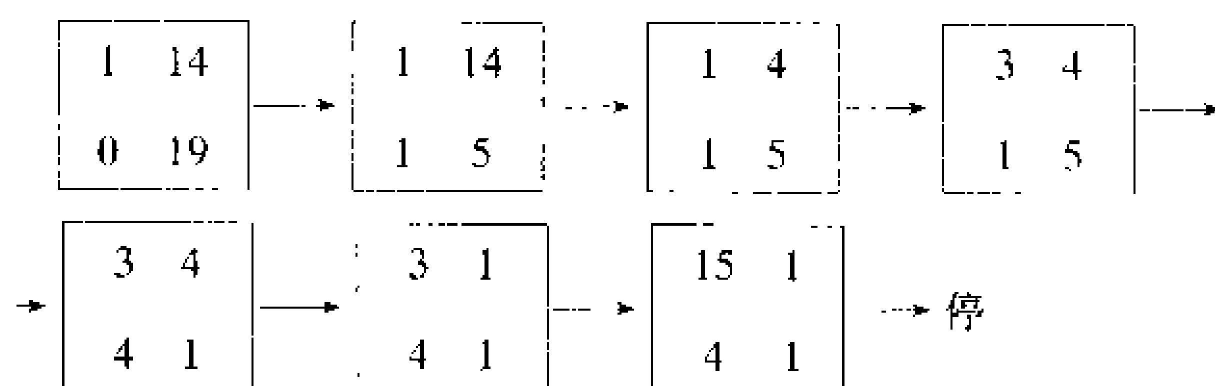
(2) 求衍母：$M = \prod a_i = 19 \times 17 \times 12 = 3876$

(3) 求衍数 $M_i = \frac{M}{a_i}, M_1 = 204, M_2 = 228, M_3 = 323$

(4) 求奇数 g_i，满足 $M_i \equiv g_i(\bmod a_i)$，于是 $g_1 = 14, g_2 = 7, g_3 = 11$

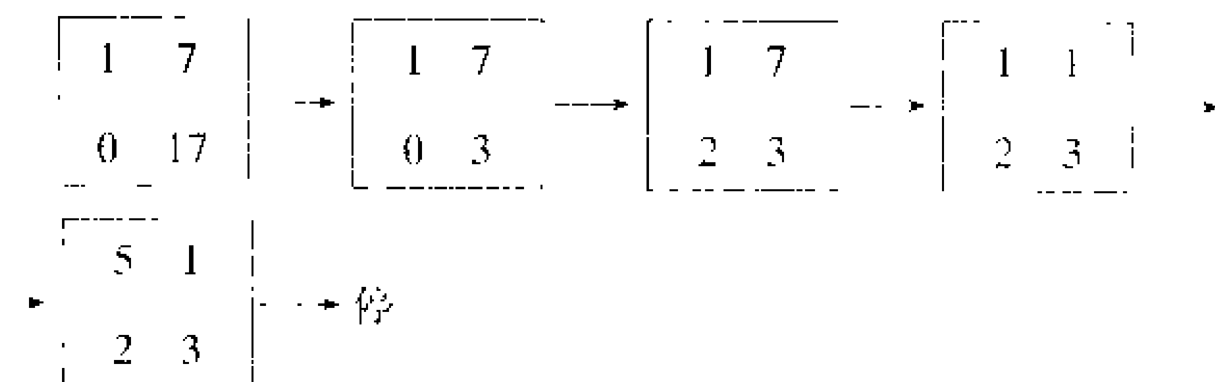
(5) 求乘率 k_i，使得 $k_i g_i \equiv 1(\bmod a_i)$

求 k_1 的程序：



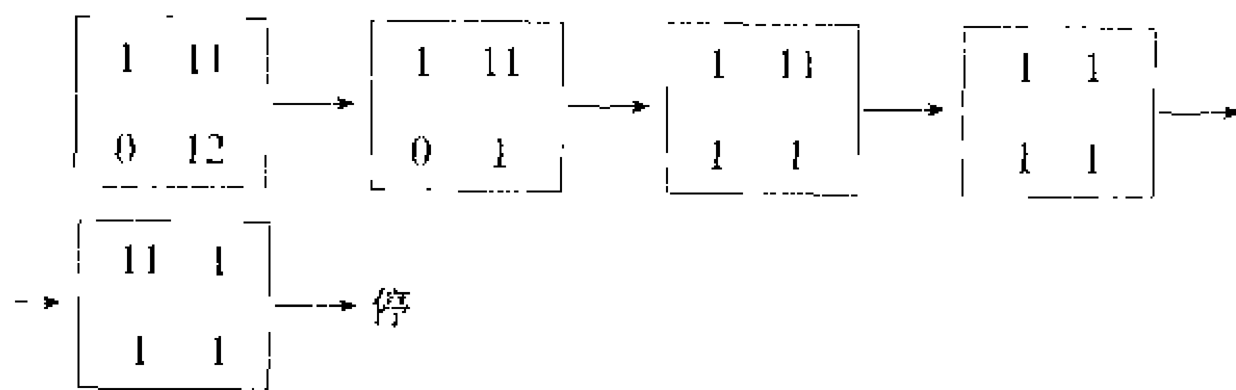
所以乘率 $k_1 = 15$。

求 k_2 的程序：



所以 $k_2 = 5$。

求 k_3 的程序：



所以 $k_3 = 11$。

(6) 求用数 $T_i = k_i M_i$ 所得 $T_1 = 15 \times 204$

$$T_2 = 5 \times 228 \quad T_3 = 11 \times 323$$

(7) 求各总：$N_i = T_i r_i$

(8) 求总数 $N^* = \sum N_i = 1 \times 15 \times 204 + 14 \times 5 \times 228 + 1 \times 11 \times 323 = 23066$

(9) 求所得数 $N = N^* - pM = 23066(\mathrm{mod}3876) = 3193$，$(0 < N \leqslant M)$。

故所求解为每箩筐米数 3193 合，甲、乙盗米各为 3192 合，丙盗米 3179 合，共盗米 9563 合。

三、关于求定数算法的改进及其现代计算机程序

秦九韶对求定数算法研究得相当精深，他的算法设计表现出想建立一种统一的、一般的算法的企图。可以说，秦氏的求定数计算几乎达到了统一的机械化算法的要求。在中国古代数学没有素数概念的历史条件下，能达到这样的水平，是难能可贵的①

但另一方面，秦九韶在算理上又暴露出还不够严密的缺陷，其演算程序化中，有些步骤走了弯路，例如，设置复算格算法，旨在加速诸 A_i 的化约过程，却因规定"求总等，存一位，约众位"的程序而带来的求续等而复乘的麻烦，其实复数格的设置完全没有必要，清代张敦仁《求一算术》即废弃了复数格算法。再比如，秦九韶在"皆

① 李继闵.关于"大衍总数术"中求定数算法探讨.秦九韶与《数书九章》.北京师范大学出版社，第 233 页，1987 年。

约而犹有类数存”时，本可以一鼓作气约下去直至互素，却因“姑置之，俟与其他遍约，而后乃与姑置者求等约之”而枉受“复验”的累赘。

秦九韶的算法理论和程序吸引着后代学者的进一步研究，清代学者黄宗宪在其《求一术通解》(1874)中，受西方数学的影响，利用素数概念改进了秦氏的求定数算法[①]。在如何得到求定数的统一的机械化算法方面，李继闵先生对秦氏算法设计加以改进，建立了一套现代算法程序。现介绍如下：

设有元数 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，先将 A_n 依次与 $A_{n-1},A_{n-2},\cdots,A_2,A_1$ 化约，具体步骤是：

(1) 求等数 $(A_{n-1},A_n)=d_1$，令 $A'_{n-1}=A_{n-1}/d_1$，$A'_n=A_n$；

(2) 求续等 $(A'_{n-1},A'_n)=d_2$，令 $A''_{n-1}=A'_{n-1}\times d_2$，$A''_n=A'_n/d_2$；

(3) 再求续等 $(A''_{n-1},A''_n)=d_3$，令 $A^{(3)}_{n-1}=A''_{n-1}\times d_3$，$A^{(3)}_n=A''_n/d_3$；

……

(K) 求续等 $(A_{n-1}{}^{(k-1)},A_n{}^{(k-1)})=d_k$，令 $A_{n-1}{}^{(k)}=A_{n-1}{}^{(k-1)}\times d_k$，$A_n{}^{(k)}=A_n{}^{(k-1)}/d_k$

这样继续下去，直到求得满足以下条件的 $A_{n-1}(k),A_n(k)$ 为止：

① $(A_{n-1}{}^{(k)},A_n{}^{(k)})=d_{k+1}=1\quad(d_k\neq 1)$

② $A_{n-1}{}^{(k)}\mid A_{n-1}$，而 $A_n{}^{(k)}\mid A_n$

③ $[A_{n-1}{}^{(k)},A_n{}^{(k)}]=[A_{n-1},A_n]$

这样的 K 是存在的(证明略)。这样将 A_{n-1},A_n 化约为互素的 $A_{n-1}{}^{(k)}$，$A_n{}^{(k)}$，我们仍记为 A_{n-1},A_n。如此将 A_n 依次分别与 $A_{n-2},A_{n-3},\cdots,A_1$ 化约毕，把约得的 A_n 记为 a_n，其余仍记为

---

① 钱宝琮.中国数学史.科学出版社，第339页，1964年

$A_i(i=1,2,\cdots,n-1)$。

对 $A_{n-1},A_{n-2},\cdots,A_2$ 依次分别重复对 A_n 的演算,则逐一得到 $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_2,a_1$,则这一组 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 即是一组定数。它满足条件(1)和(2)是显然的。而由关系 $[A_1,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n]' = [A_1,\cdots,A_{n-2},A_{n-1},A_n]$,容易推知条件(3)亦满足。

笔者就上述算法,编成 FORTRAN 现代计算机语言,完全实现在计算机上操作运行,下面是对 100 维的数组的程序语言设计及对几组数据的执行结果,包括对秦氏“推计土功”题计算结果的验证。其实这种程序适于任意有限维数组。

TYPE　FHL.FOR

```
      PROGRAM  SW
C     THIS  CODE  IS  TO  GAIN'DING  SHU'
      DIMENSION  N(100)
      DO  10 I = 1,100
      PRINT ×,'PLEASE  ENTER An'
      READ(×, ×)N(I)
      IF (N(I).LT.O)  GOTO 20
10    CONTINUE
20    ISAV = I - 1
      DO  30  I = ISAV,2, - 1
      DO31  J = I - 1,1, - 1
      CALL  D(N(J),N(I))
30    CONTINUE
31    CONTINUE
      DO 40  I = 1,ISAV
      WRITE(×, ×) N(I)
40    CONTINUE
      END
```

```
      SUBROUTINE  D1(M1,M2,IG)
C     THIS CODE IS TO GAIN THE MAXIMUM
C     OF NUMBERS WHICH CAN BE DIVIDED
C     BY M1 AND M2
      M = MIN(M1,M2)
      DO 10 I = 1,M
      MX = (M1/I) × I
      MY = (M2/I) × I
      IF (MX.EQ.M1.AND.MY.EQ.M2)IG = I
10    CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE  D(M1,M2)
C     THIS PASSAGE IS TO MODIFY A_{n-1} AND An
      CALL  D1(M1,M2,IG)
      IF (IG.EQ.1)  THEN
      RETURN  ELSE
      M1 = M1/IG
      M2 = M2
      END
1     CALL  D1(M1,M2,IG)
      M1 = M1 × IG
      M2 = M2/IG
      IF(IG.NE.1)  GOTO  1
      RETURN
      END
      C:\SONG\TEMP > FHL
```

```
PLEASE  ENTER An  10
PLEASE  ENTER An  20
PLEASE  ENTER An  30
PLEASE  ENTER An    1
              1  4  15
C:\SONG\TEMP > FHL
PLEASE  ENTER An  21
PLEASE  ENTER An  49
PLEASE  ENTER An  15
PLEASE  ENTER An  32
PLEASE  ENTER An  66
PLEASE  ENTER An   -1
              1  49  5  32  33
C:\SONG\TEMP > FHL
PLEASE  ENTER An  54
PLEASE  ENTER An  57
PLEASE  ENTER An  75
PLEASE  ENTER An  72
PLEASE  ENTER An   -1
              27  19  25  8
C:\SONG\TEMP > FHL
```

以上计算机算法程序具有一般化特征，它是在秦九韶算法基础上加以改进而设计的。因此，从算法的角度，尤其是算法的机械化来看，以秦九韶为代表的中国传统数学的方法，其价值是不容低估的。

四、"大衍总数术"的现代计算机算法及评述

秦九韶的"大衍总数术"以文字叙述，是人工利用算筹的算法，如果把它译成现代算法语言程序，就可以用计算机求解 以下

是用 Algol60 语言写出"大衍总数术"完整的算法程序[1]。

对于前文给定的一次同余式组：$N \equiv R_i(\mathrm{mod} A_i)(i = 1, 2,\cdots,n)$，我们有下列算法：

```
for i := 1  step 1 until n do
for j := i + 1  step 1 until n do
begin d := (A_i, A_j);
if (A_i, A_j/d) = 1  then A_j := A_j/d else
if (A_j/d, A_i) = 1  then A_i := A_i/d end j;
for j := i + 1  step 1 until n do
begin d := (A_i, A_j); A_i := A_i/d end j, i;
for i := 1  step 1 until n do
for j := i + 1  step 1 until n do
while (A_i, A_j) > 1 do
begin d := (A_i, A_j); A_i := A_i/d; A_j := A_j * d end while
j, i;
M := 1; for i := 1  step 1 until n do M := M * A_i;
for i := 1  step 1 until n do
begin m_i := M/A_i
p_i := m_i; while p_i > A_i do p_i := p_i - A_i;
e1 := 0  e2 := 1; h1 := A_i; h2 := p_i;
while h2 > h1 do
begin if h1 > h2 then h1 := h1 - h2; e1 := e1 + e2;
if h2 > h1 then h2 := h2 - h1; e2 := e2 + e1 end while;
k_i := e2;
s_i := k_i * m_i  end i;
N := 0; for i := 1 step 1  until n do
N := N + R_i * S_i
```

---

[1] 莫绍揆，秦九韶大衍求一术的新研究，秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，第187页，1987年。

$N:=rs(N,M)$; end

以上计算机算法语言及其机器求解过程是建立在对秦九韶大衍总数术算法的理解和思想观念基础之上，对此笔者有以下几点看法予以说明：

(1) 本程序中"约奇"应作约后两数互素解释；"约偶"即为约后两数不互素解，"约奇弗约偶"实则规定约奇必须先于约偶，故这时可以反约。(如果 A_1,A_2 为约偶，而 A_1、A_3 为约奇，则先作 A_1,A_3 而将 A_1、A_2"姑置之")待本变内一切约奇完成之后，再回头施以留下来的约偶步骤。

(2) 约奇不满足时，施以约偶，这时以等数约后不约前，而不能反约(除非约奇情况可以反约)。

(3) 约奇、约偶确保了化约后各模数乘积等于原模数的最小公倍数，但不一定能保证两两互素，故还需施以复乘求定程序，即以等数约前且乘后，重复做到各模数两两互素为止。

(4) 求出乘率 k_i，在求各总 $k_i m_i R_i$ 中的 R_i 时，应为原 R_i 除以化约后定母 A_i 的剩余，而并非原来的 R_i，故在语言程序中须实施对原 R_i 除以定母 A_i 的步骤。

7.4 明代数学家黄宗宪对求乘率程序的改进

清代学者黄宗宪除了改进秦九韶的求定数算法外，还在他的《求一术通解》中介绍了他的求乘率方法，这是在秦氏大衍求一术方法基础上，通过对衍数和定母的辗转累减和"寄数"的辗转累加的机械化程序步骤而获得乘率的，与国外解一次同余式方法相比，黄宗宪采用表格非常明了、方便，方法也更显快捷。《求一术通解》中云：

> 列定母于右行，列衍数于左行(左角上预寄一数)辗转累减(凡定母与衍数辗转累减，则其上所寄数，必辗转相加)至衍数余一即止。视左角上之寄数为乘率。
>
> 按：两数相减，必以少数为法，多数为实，其法上无寄数者，不论减若干次，减余数上仍以一为寄数；其实上无

寄数者，减余数上以所减次数为寄数；其法上实上俱有寄数者，视累减若干次，以法上寄数亦累加若干次于实上寄数中，即得减余数上之寄数矣。

以上术文为一般化程序。书中有以衍数为 3800 和定母为 27 的例子。此相当于求 k，使 $3800k \equiv 1 \pmod{27}$。据黄宗宪术文及细草就其程序步骤列述如下：

(1) 列表。衍数 3800 的寄数为 1。

寄数	衍数	定母	寄数
1	3800	27	

(2) 以 27（黄宗宪所说的“法”）累减 3800（共减 140 次）余 20。因减数无寄数，故在 20 左旁寄数栏里仍记为 1。

寄数	衍数	定母	寄数
1	3800	27	
	3780		
1	20		

(3) 以余 20 累减 27（共减一次）余 7，以累减次数 1 乘以 20 左旁的寄数 1，即以 1 × 1 寄以减数 20 右旁，余数 7 右旁寄数为 2。

寄数	衍数	定母	寄数
1	3800	27	
	3780	20	1 × 1
1	20	7	1

(4) 同理以 7 累减 20（共减两次），在 14 左旁寄以 2 × 1，在余数 6 左旁寄以上下两寄数之和为 3。

寄数	衍数	定母	寄数
1	3800	27	
	3780	20	1 × 1
1	20	7	1
2 × 1	14		
3	6		

(5) 同理以 6 累减 7,并在右寄以 3 × 1 在余数右寄 3 与 1 的和 4。

寄数	衍数	定母	寄数
1	3800	27	
	3780	20	1 × 1
1	20	7	1
2 × 1	14	6	3 × 1
3	6	1	4

(6) 最后以 1 累减 6(累减五次),余 1 为止,余数 1 的左旁寄数 23 即为所求乘率 k。

寄数	衍数	定母	寄数
1	3800	27	
	3780	20	1 × 1
1	20	7	1
2 × 1	14	6	3 × 1
3	6	1	4
5 × 4	5		
23	1 止		

第8章　中国位置化代数与天元开方运算程序

8.1　中国位置化代数的确立

在数学史的研究中，笔者不赞成中国古代没有产生数学符号的观点，但有一种观点认为天元术和四元术称为“符号化代数”或“半符号化代数”，笔者认为也不妥。按笔者的观点，确切的说法应该是位置化代数。

首先，在西方，代数思想是伴随着符号化的进程而逐渐确立的。中国数学家在13世纪使用的天元术标志着筹算位置模式发展基础上的位置化代数的真正确立。这之前，没有一种普遍有效的建立方程的方法。方程以文字描述，方程理论依赖几何思维，数字方程是和开方方法联结在一起的，方程的各项都沿袭了开方式的名称，即每一项都有专门的术语，例如常数项叫做实，一次项叫做从或法，二次项叫中行，等等。这些术语当然不能称为数学符号。但宋元时代引入的天元与天、地、人、物四元，的确是表示未知数的符号。由于它们所代表的已具有抽象的意义，引入这些符号后，就不需用不同术语来表示方程式的各项了，应用这些符号就可以明确地表示一个高次方程式和一个高次方程组。但宋元代数学引入符号的方法，毕竟是依靠传统的筹算位置模式发展起来的，在数字计算方面，数字的值依靠数字本身的值和它所处的位置来决定，即遵循筹算的位置值制。天元术的表示法有一个演变过程。李冶在《敬斋古今黈》中记载着：“予至东平，得一算经，大概多明如积之术。以十九字志其上下层数。曰：仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天、人、

地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼。"[①]从文字上可以看出，这是以人居中表示常数项位置，列出以天、上 …… 地、下 …… 各不同层次位置表示上至9次下达－9次的整指数幂。各位置出现的数是各次幂的系数。这是天在上，地在下，人居中的直接反映，虽然这也是用位置来表示的含正、负整指数幂的式子，但还带着文字的尾巴，并且同一未知数不同的次幂要用不同的汉字表示。后又交换天元、地元的位置，采取天元在下、地元在上的方式，常数项用"太"表示。天元术后又发展到只用一个元表示未知数，在12世纪末、13世纪初，已经使用"元"，进而简化了天元术的表示和演算。李冶充分利用位置关系，沿用"元"字作为一次幂位置的标志，或用"太"字作为常数项的位置标志，其他幂次皆按位置制给出。他在《益古演段》中以低次项在上，高次项在下的筹式表示，这样的排列与传统的开方图式是一致的，方程布列出来后就可进行增乘开方运算，成为中算家惯用简捷的固定形式。

李冶这种利用"元"尤其是利用"太"的上下位置来表达未知数的不同次幂的方法，是在中国传统位置思维模式基础上的位置化代数方法。因为"太"只代表位置，在此基础上的常数是完全确定的，它不像"元"似乎还有表示未知数的符号化的意义，而且，运算符号及等号均未产生。因此，李冶的天元术不能看做是符号化代数，也不能称作"半符号化"代数，而是彻底的位置化代数。在此基础上形成二元术、三元术和四元术是发展的必然。

其次，从代数方面来说，天元术的意义不仅在于引进未知数给列方程解应用问题带来方便，更重要的是将未知数与已知数平等看待并一起参与运算这种思想。国外产生真正代数学的标志是9世纪阿拉伯数学家花拉子模的"还原"与"对消"。("代数"一词的原文就是"还原与对消"之意）但还原与对消只限于让未知数参与加减法运算（至多与乘法运算有关）。而李冶及其前人所创立的天元术，让未知数参与运算已不限于还原与对消，而是所有的代数运

---

① ［元］李冶．敬斋古今黈，刘德权校点，中华书局，第32页，1995年。

算都用到了,例如:"以天元除之"(除法)、"以自之"(平方)、"开益积三乘方"(开方),等等。如果把花拉子模的"还原"与"对消"看做代数思想的真正萌芽,那么李冶及其前人的天元术则标志着代数思想的完全确立[1]。但在代数中引入符号后,仍遵循这种位置的表示已越来越暴露出自身的局限性。第一,这样的符号只是起着位置符号运算的作用,真正参与运算的还是具体数字,依靠位置制,有些运算不能进行,如天元式除天元式就无法进行。也就是说,这样的符号没有完全起到现代数学符号的作用。第二,这种位置化代数符号,只能发展到四个未知数,多于四元的方程组就无法表示,只能采取《九章算术》的古老方法,这就限制了方程的进一步发展。值得指出的是,李冶引入符号不仅表现在代数方面,同时还表现在几何方面,如大勾股形用天地乾表示,地乾表示勾,天乾表示股,天地表示弦;高勾股形用天日旦表示,日旦表示勾,天旦表示股,天日表示弦,等等。遗憾的是,在几何方面也和代数方面一样,这种思想并没有得到充分的发展。

再次,从历史上看,数学(特别是代数学)的表述方式最初都是文辞式的,当数学发展到一定阶段,其表述方式相应发展成两类模式:符号式和位置式。这两种表述方式直接和表层的原因是受到相应文字形式的影响:使用表音文字的文化传统(希腊、印度、欧洲)和使用表意文字(象形文字)的文化传统(以中国为代表),前者对某些较常出现的量和运算采用了缩写的方式,通常是取相应单词的第一个或前几个字母,最终发展成今天通用的数学符号体系。后者倾向于发展位置式的表达。而在深层的意义上说,这两种数学表述方式又是体现了这两种文明在思维方式上的区别:前者侧重于抽象思维,后者侧重于形象思维。中国传统数学依赖位置化的筹式演算体系和中算家所采取的位置思维的方式和方法反映乃至适应了中国文化的传统,这种方便、直观富有启发性的位置式表

---

[1] 方镇华,李冶数学成就新识,数学史研究文集,第五辑,九章出版社,第113页,1993年

示法系统发展，为中国传统数学算法机械化带来了成功。到宋元时期，数学发展达到高峰。由于筹算的局限性，运算符号及等号尚未产生，但由于发展并掌握了一套以位置表达未知数不同次幂的方法，"立天元一"已有明确的步骤，各种各样的未知数即可用"天元"统一符号表示，使之具有数学符号和性质符号的功能，像已知量一样参与运算，从而改变了以文字描述方程的旧面貌，这种代数称为位置化代数。西方数学的秘密往往藏于符号之中，中国数学的内涵则需靠位置关系来揭示，道理便在于此。

8.2　李冶对天元术一般化程度的提高

一、天元开方的一般化程序

李冶的天元术致力于寻找一般的、可用于解决各种问题的列方程的方法，总结出一套简单、明确的列方程程序：首先是立天元一，这相当于设未知数 x，然后根据问题的条件，寻找两个等值的而且至少有一个含有天元(即 x)的多项式，最后把两个等值多项式连为方程。通过"如积相消"便得到含有天元的一般开方式，即一个一端为零的一般数字高次方程：

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

李冶的一般天元方程的程序，标志着方程理论有了独立于几何的倾向，这是数学思想上的突破。他能用天元术熟练地列出高次方程，《测圆海镜》170 题中有 19 题列出三次方程，14 题列出四次方程，还有 1 题列出六次方程。李冶所列出的方程已突破秦九韶"实常为负"的限制，这时的常数已无任何限制，可正可负，而不拘泥于它的几何意义。实际上《测圆海镜》中方程各项的符号均无限制，这是代数学的一个进步。

如积释锁则表示列方程、解方程的完整过程。《测圆海镜》170 题中，每题给出的解法或一种或多种不等，用天元式列方程，其方法和步骤均具有一般性，且与现代列方程的方法基本一致，只是所

用符号不同。天元式的加减，是同次幂系数相加减，真数乘天元多项式是将真数乘天元式各项的系数。由于天元多次项采用位置制表示，天元或天元幂乘天元式只需将“元”字或“太”字移下一层或数层。同样，天元或天元幂除天元式只需将“元”字或“太”字移上一层或数层即可，即“乘则升之，除则降之”，或“乘则降之，除则升之”(后者与传统开方式一致)，这种升降幂的方法，这就相当于现代用 x^n 去乘或除方程式各项。李冶在《敬斋古今黈》中以“增乘”法建立了这种天元开方式中的天元式乘法：“若增乘者，寻常惟求积则用之，其左右上下各宜位，以相继乘耳。”指出两个天元式左、右、上、下的系数在相乘中各放于适当的位置，相继作乘。例如：

$$(a_1x^2+b_1x+c_1)\times(a_2x^2+b_2x+c_2)$$

				a_1a_2
				$b_1a_2+a_1b_2$
a_1	×	a_2	=	$c_1a_2+b_1b_2+a_1c_2$
b_1		b_2		$b_2c_1+b_1c_2$
c_1 太		c_2 太		c_1c_2 太

其所以称为“增乘法”可能是在乘得的积中有若干同类项时，随乘随加，与“增乘开方法”中的随乘随加相类似，故踵其名。

二、化分式方程为整式方程

天元式除天元式是不能进行的，因此在建立天元开方式中，遇有天元开方式作分母时，都是暂将分母“寄下”，而在另一“同式”中乘以同一分母又除以同一分母，在“同数相消”时消去。以现代符号说明之：

若 $A=q_1(x)/q_2(x)$ (1)

又 $A=p_1(x)$ (2)

($p_1(x)$，$q_1(x)$，$q_2(x)$ 为整式)

则 $q_1(x)/q_2(x)=p_1(x)=A$

将(2)式变为 $p_1(x)q_2(x)/q_2(x)=A$

(3) 与(4) 相消得 $q_1(x) - p_1(x)q_2(x) = 0$

李冶在作(1) 式时，便把分母暂放在一边(即“寄母”) 待作 $A = p_1(x)$ 时，再用这个分母乘 $P_1(x)$ 为“同数”，便得(3) 式。这说明，李冶已懂得并采用了方程两边同乘一个整式的方法化分式方程为整式方程。

三、对幂概念的推进

不拘泥于西方符号化数学的观点，从位置化数学的角度来看，前面的论述已表明：以“太”为基准，“乘则升(降) 之，除则降(升) 之”就是用乘除法来定义各正、负整指数幂，“升”、“降”就是它们的位置表示。于是零指数幂的概念自然就有了，“太”的位置就是零指数幂。这与西方引进特别的符号 $x^0, x^1, x^2, x^3, \cdots, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3} \cdots$ 来表示整指数幂是趣异实同的。时间上比西方的牛顿(17 世纪) 要早 600 多年。就中国自身而言，李冶及其前辈也把更早已有的正整指数幂的概念向负整指数幂推进了一步。

第9章 多元高次方程组解法程序的机械化

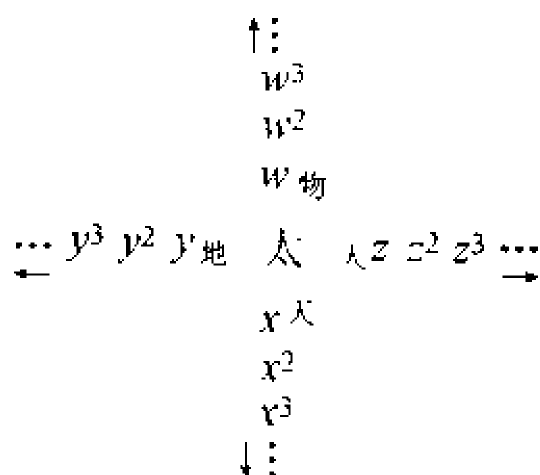
早在《九章算术》中就已经详细记述的多元一次方程组及其程序机械化的解法，随着12、13世纪天元术的产生、发展和成熟，很快被推广到求解高次联立方程组问题中去，把天元术由一个未知数推广到二元、三元以至四元，以建立多元高次方程组已成为必然趋势，李德载的二元术和刘大鉴的三元术都相继应运而生，元代朱世杰又在此基础上更进一步，建立起举世闻名的四元术。

朱世杰的四元术包括四元式表示法和四元消法两大部分内容。其《四元玉鉴》(1303)是中国数学史上流传至今的关于高次方程组一般解法的最早记载。

9.1 四元筹式布列的有向化方法

从数学思维方式上分析，朱世杰四元式的筹算布列，是数学中有向化方法的具体运用。所谓有向化是指某些问题中的量或某些问题本身，原无方向的意义，但在分析和处理过程中，按需要把它们看成是有方向性的，以便于问题的解决，这样的思维方法称为有向化方法。例如，对某些由 n 个量决定的系统，有时就要把这个系统看做是一些有方向的量的集合，这些有方向的量均可沿 n 个方向自由变动、优化组合。四元式筹算的摆法，是在天元式的筹算造法的基础上发展起来的，可以看做是沿上、下、左、右四个方向的自由变动，可分别以 x、y、z、w 来表示朱世杰所指的天、地、人、物四元。对此，莫若在《四元玉鉴》序文中记述道："元气居中，立天元一于下，地元一于左，人元一于右，物元一于上。阴阳升降，进退左右，互通变化，错综无穷。"述文前一部分是四元式筹算表示法，相当

于"太"字居中表示常数项，天、地、人、物四个未知数居于"太"的下、左、右、上四个位置，诸元的幂次由它们与"太"字的位置关系决定，并沿四个方向各自向外延展开去，距"太"字愈远，幂次愈高。相邻两元的幂次之积记入各相应行列的交叉处，不相邻诸元的幂次之积无相应述位置，分寄在适当的夹缝中（如图）；文后半部分是说在朱世杰所使用的四元记法中，将全式沿上下方向"升降"和左右方向"进退"，可以实施方程变换，"互通变化，错综无穷"，以用于四元式相消化简。



这种思维有向化方法的突出作用是：

第一，它能将彼此孤立的量用方向结合起来，使之成为一个相互关联的统一整体。四元术就是通过 x、y、z、w 四元的组合构成方程的各项，按方向、位置布列在"太"字四周相应位置，可构成以"太"为中心的第 1、2、3、4 象限，通过四则运算，可以简便地列出任何高次的方程和四元高次方程组。

第二，有向化方法为求解高次方程组提供了统一处理的机械化方法程序。例如在四元式中，对于方程的各项位于"第 3 象限"的二元方程组，若视为关于 x 的方程组，那么方程两边乘以或除以 x 的运算，就可在四元筹式中表现为整个方程的下降或上升；若视为关于 y 的方程组，对 y 的乘法或除法分别只需将整个方程向左、向右平移。对于三元的方程组则只能下降或上升而不能左右平移，至于四元则上下左右均不能移动。因此，有向化方法也说明了"互隐通分相消"程序不适用于解三元和四元方程组的原因。

再比如对"人易天位"的解释："人易天位"通常在"剔消"完成之后来实施，即四元式中，各项均位于"第 4 象限"。此为关于 x、z 的方程组，将方程组中的 x 换为 y，把 z 换为 x，这种变换只需以"太"为中心按顺时针方向旋转 90 度使它们位于"第 3 象限"即可

完成。相似道理,四元术如消去者为天元时,则需要将其余三元旋转180度,使它们处于第3、4象限的位置上——这就是"物易天位"。这里之所以要"人易天位"和"物易天位",是为了适应中国传统算法程序机械化特点的需要;因为无论选择地元 y 还是选择天元 x 作为被消去的元,每次消掉一个元后,经过这样的"人易天位"、"物易天位",朱世杰总可以把需要求解的内容化为一个以天元 x 为未知数的方程,便可应用传统数学中的天元术,而其算法语句便可以一字不变地加以机械地反复运用,不致因为要求解地元或物元造成名词上的不统一而须修改术文。由于有向化方法可将各种片面、孤立的情况联结成为一个统一的整体,这样就为解决问题提供了统一处理的方法,使解题方法具有高度的简洁性、概括性和统一性。

方向、位置思维方法在中国古算中是很突出的。金元时期中算家发明的天元符号、创立的天元术并在此基础上发展的四元术,使这种用方向、位置表达未知数的方法成为当时多元高次方程(组)及其解法高度发达的一个重要原因,这在当时确实是一项了不起的成就。当然我们不否认,采用四元筹式的布列,由于四元已把"太"的上下左右四个方位占满,高于四元的方程组便无法表示,更无法讨论一般的高于四元的 n 元方程组,这便限制了方程理论的进一步发展,尤其是限制了方程组的一般化程度。而且正是由于这种符号后来没有继续进步和向前发展,至16世纪欧洲出现了符号代数后,相比之下,我国代数的方向、位置性质和符号就显得落后了。

9.2 四元术的消法程序的机械化

四元术的核心是四元消法,这是解四元高次方程组的关键技术,也是建立在天元术和线性方程组解法基础上的又一套完整程序。四元筹式的有向化布列奠定了四元消法机械化程序实施的基础。朱世杰《四元玉鉴》全书之首"假令细草"列出了天元术、二元

术、三元术和四元术的范例，给出了这四个例题的演算程序，但十分简略，书中其余问题则仅给出消元后所得的一元高次方程，而对其间的消元过程没有记述，这给人们理解"四元消法"带来了一定的困难。但在祖颐为《四元玉鉴》所写的后序中有对四元解法程序的总结或简单的启示，祖颐写道：

以元气居中，立天句、地股、人弦、物黄方，考图明之，上升下降，左右进退，互通变化，乘除往来，用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式。必以寄之，剔之，余筹易位，横冲直撞，精而不杂，自然而然，消而和会，以成开方之式也。

根据例题细草以及祖颐所记述的内容来看，朱世杰的"四元消法"是一套建立在方向、位置思维基础上的机械化程序，大致可分为"剔而消之"、"易位"、"互隐通分相消"、"内外相消"的四大程序步骤。下面以"三才运元"题为基础，对由今式、云式、三元之式构成的三元方程组的一般形式，说明其解法程序。题中要求解的三元方程组可表示为：

$$\begin{cases} -xy^2 - y + xyz - x - z = 0 & \text{今式} \\ y^2 + x^2 - z^2 = 0 & \text{三元式} \\ y + x - x^2 - z + xz = 0 & \text{云式} \end{cases}$$

此三元方程组可视为关于 y 的二次方程组的一般形式：

$$\begin{cases} A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0 & (1)\ \text{今式} \\ B_2y^2 + B_1y + B_0 = 0 & (2)\ \text{三元式} \qquad (*) \\ C_1y + C_0 = 0 & (3)\ \text{云式} \end{cases}$$

（其中 A_2、A_1、A_0、B_2、B_1、B_0、C_1、C_0 均为不含 y 的多项式但可含有 x、z），其消法程序如下：

(1) 化三元式、四元式为二元式——"剔而消之"。

对于三元、四元的方程组，朱世杰创立"剔而消之"程序。其所以要"剔消"，是由筹式布算的有向化性质决定的，因为三、四元式不能随意以未知数的乘幂乘除，不能随意移动"太"的位置。如前

文所述，三元的方程组只能上下升降而不能左右平移，四元的方程则上下左右均不能移动。

关于"剔消"之法，朱氏原草极少述及，清代学者对此作了不同的解释，绝大多数都把"剔消"中的"剔"理解为将全式"剔分为二"，但如何剔、如何消则有不同的解释，以本例三元式消去地元(y)为例，清代沈钦裴在《四元玉鉴细草》中主张将待消两式以"太"字所在的一行为中线剔分为二(以"太"所在一行属于右半)，每半为一个二元式，便于计算。

按沈钦裴对"剔消"的理解，对三元方程组(*)中(1)式左半，以地元 y 除之乘(2)式右半，以(2)式左半以地元 y 除之乘(1)式右半，这相当于以(4)、(5)两式

$$\begin{cases} (A_2y + A_1)y + A_0 = 0 & (4) \\ (B_2y + B_1)y + B_0 = 0 & (5) \end{cases}$$

括号中的多项式与 A_0、B_0 交互相乘，并将乘得的二式相消，得

$$D_1y + D_0 = 0 \tag{6}$$

(其中 $D_1 = A_2B_0 - A_0B_2, D_0 = A_1B_0 - A_0B_1$)这就降低了方程的次数。

(6)与(4)或(5)联立，实施同样的程序可得

$$E_1y + E_0 = 0 \tag{7}$$

原方程可化为(3)、(6)、(7)联立的方程组

$$\begin{cases} C_1y + C_0 = 0 \\ D_1y + D_0 = 0 \\ E_1y + E_0 = 0 \end{cases}$$

反复施以同样的程序步骤，即可消去地元 y，最后得到

$$\begin{cases} F(x, z) = 0 \\ G(x, z) = 0 \end{cases}$$

这样，三元方程组就被化为二元方程组。

(2)"易位"。

因为以上三元式消去的是地元 y，将所余的二式(包含天元、

人元）以“太”为中心按顺时针方向旋转90度，即令 $y=x$，$x=z$，使二元式各项由“第4象限”转至“第3象限”，这就是“人易天位”的程序。通过易位的步骤，方程组

$$\begin{cases}F(x,z)=0\\G(x,z)=0\end{cases}\quad \text{即变为}\quad \begin{cases}F(y,x)=0\\G(y,x)=0\end{cases}$$

（假如三元式消去的是人元，则无需易位；对于四元式，若消去者为天元时，须将第1、2象限各项移到“太”所在一行为横轴的第3、第4象限中的对称位置上，称为“物易天位”）由前文分析，易位是适应算法机械化需要的步骤，由于其本身并没有改变数量关系，因而不会影响方程的解。

(3) 化二元多行式为二元二行式——“互隐通分相消”。

经过“剔而消之”和“易位”后的二元方程组

$$\begin{cases}F(y,x)=0\\G(y,x)=0\end{cases}$$

若此方程组多于“二行”时，朱世杰有“互隐通分相消”之程序，包括两种方法：其一，是消去首项 y^2；其二，是消去常数项（不含 x 的项）。朱世杰并没有消去首项或消去尾项的固定程序，而是视情况而定的。如“三才运元”问中朱氏草中前式、后式均为二元三行式，其一般形式可写为：

$$\begin{cases}m_2(x)y^2+m_1(x)y+m_0(x)=0 & (8)\\n_2(x)y^2+n_1(x)y+n_0(x)=0 & (9)\end{cases}$$

互隐通分相消要消 y^2 项，以 $n_2(x)$ 乘(8)中除去 y^2 以外各项，再以 $m_2(x)$ 乘(9)式中除去 y^2 以外的各项，相消得

$$p_1(x)y+p_0(x)=0 \qquad (10)$$

联立(10)与(8)或(9)，这时要消的两方程次数不同，故可以 y 乘(10)，使其次数相同，（这在朱氏的四元式记法中，只需将全式向左平移一项即可，如莫若前序中所说的“阴阳升降，左右进退”和祖颐后序所说的“横冲直撞”）然后再与(8)或(9)式联立，用同样的方法程序消去 y^2 项得

$$q_1(x)y + q_0(x) = 0 \quad (11)$$

这样原来的二元三行式就化为(10)和(11)联立的二元二行式

$$\begin{cases} p_1(x)y + p_0(x) = 0 & (10) \\ q_1(x)y + q_0(x) = 0 & (11) \end{cases}$$

消尾项即常数项也是采用同样的方法，如"四象会元"问中，在消得前式、后式之后，必须连续消去其常数项，方能得出朱氏原草中的右行[1]。

(4) 化二元二行式为一元式——"内外相消"

通过上述1、2、3步骤化得的二元二行式(10)和(11)实则为二元问题中的最简单形式，其中 $p_0(x)$、$q_1(x)$ 是"内二行"，$p_1(x)$、$q_0(x)$ 是"外二行"，朱氏采用"内外相消"程序，如在"三才运元"一问消法的最后一步：以"内二行"相乘得积与"外二行"相乘得积，相消得

$$F(x) = p_0(x)q_1(x) - p_1(x)q_0(x) = 0$$

这是一个只含有一个天元未知量 x 的方程。

至此，朱世杰的"四元消法"程序已基本结束。因在朱世杰之前已有发展成熟的天元术和正负开方术等高次方程求解程序方法，自然可将问题最终归结为传统数学中的天元术和正负开方术程序方法求解方程。

9.3 对四元消法程序的几点讨论

(1) 沈钦裴采取上述"剔消"程序消元，清代陈棠和罗士琳分别采用了不同的方法。陈棠由云式(3)得到了"同地元数"$y = f(x,z)$，"同地元幂数"$y^2 = [f(x,z)]^2 = F(x,z)$，施于(1)式，将 A_2y^2 一行以 y^2 除之，以"同地元幂数"乘之，将 A_1y 一行以 y 除之，以"同地元数"乘之，再与 A_0 三项合并，即可消去 y，以同样

---

[1] 杜石然，朱世杰研究，宋元数学史论文集，科学出版社，第182页，1966年。

的方法施于(2)式将 y 消去，这种消元法相当于把 $y = f(x,z)$ 和 $y^2 = F(x,z)$ 代入(1)和(2)中的代入法。罗士琳消法也相当于代入法，但与陈棠稍有不同，罗氏在求得 $y = f(x,z)$ 与 $y^2 = F(x,z)$ 后，以(1)各项系数乘之得：

$$\begin{cases} A_2y^2 = A_2F(x,z) \\ A_1y = A_1f(x,z) \end{cases}$$

然后，以这两式与(1)相消，这样就可消去 y。对此，陈棠评说"其去朱术远矣"。对比沈、陈、罗氏三家对"剔消"的解释，沈氏方法更近乎朱世杰原法。笔者也持同样观点，我国古代"消法"程序比较系统，沈氏方法更符合古代解方程组的习惯。

(2) 关于"易位"。朱世杰解多元高次方程组的该过程以现代解方程法看似显得多余而很少被提及。但笔者认为这种方向转换正是适应中国传统算法程序机械化特点的一个突出表现(前文已述)。故可以说，易位对于中算家以算筹为工具解多元高次方程组来说是一个很有用的步骤，且该步骤在现代计算机的循环程序设计中也常有应用。

(3) 关于"互隐通分相消"。笔者同样认为，朱氏"互隐"的意义在算法上颇似通分程序中的"母互乘子"的齐同原理，"互隐通分"这一名称概源于此。这也说明朱氏在算法程序设计方面是对传统方法的继承下提高的。清代数学家对此理解大体相同，比如沈钦裴和陈棠的解释都比较切合朱氏"互隐"原意。钱宝琮的理解也与陈棠相同。实际上，运用这种方法可以对二元的任意高次联立方程组求解，只有罗士琳采用了遍乘之后再相消，而不是待消一行不乘，与朱氏原意不合。

(4) 关于"内外相消"。朱世杰对二元二行式并没有采用"遍乘"而只采用"内二行"相乘和"外二行"相乘消去，这与"互隐通分相消"之法相通，此处再次证明罗士琳用"遍乘"来解释是不必要的。

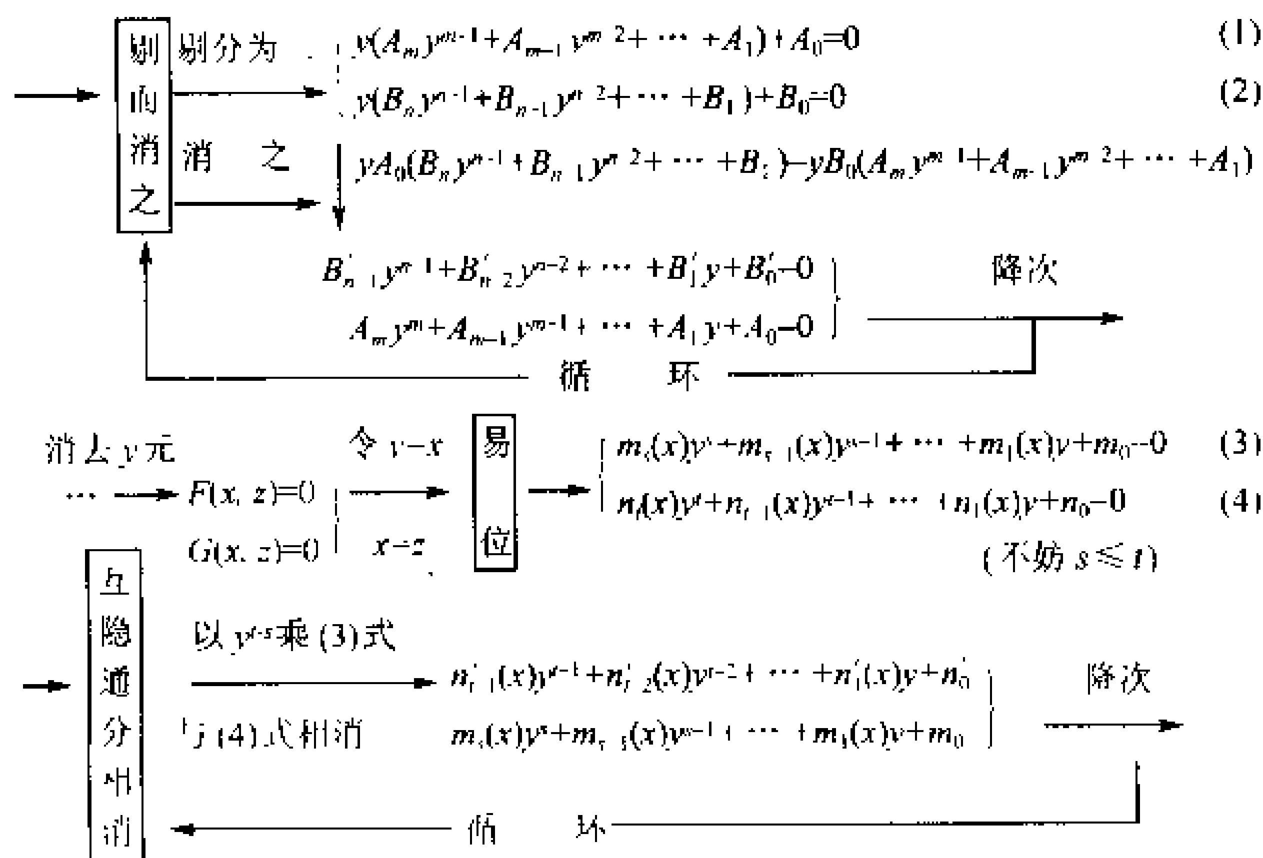
9.4 一般高次方程组消法程序框图及意义

以上剔而消之、易位、互隐通分相消和内外相消，便是朱世杰解多元高次方程组的主要程序：即先反复实施剔而消之，将多元高次方程组通过降次消元化为二元高次方程组。"人易天位"或"物易天位"总选择 y 作为被消去的元，以保证算法口诀一字不变地反复运用，接着再反复运用互隐通分相消，降低未知数 y 的次数，消得二元二行式，然后再以"内二行"、"外二行"相乘相消，就变成只含有天元未知数 x 的高次方程，最后依天元术和正负开方术求解。此程序适应了我国古算机械化的需要，因而可以一般化，用下面的程序框图表示：

一般方程组：

$$\begin{cases} A_m y^m + A_{m-1} y^{m-1} + \cdots + A_1 y + A_0 = 0 \\ B_n y^n + B_{n-1} y^{n-1} + \cdots + B_1 y + B_0 = 0 \end{cases}$$

（其中 A_i, B_j, A_0, B_0 均为不含 y 的多项式（可含 x, z 等），不妨设 $m < n$）



$$\xrightarrow{\text{二元二行式}} \begin{cases} p_1(x) + p_0(x)=0 \\ q_1(x) + q_2(x)=0 \end{cases} \boxed{\text{内外相消}} \longrightarrow F(x)=p_0(x)q_1(x)-p_1(x)q_0(x)=0$$

总之，对于多元高次方程组的求解，朱世杰创造的四元消法是一套完整的一般性的消未知数程序。这是他的主要贡献，四元高次方程组的解法也代表了当时世界范围内方程组理论的最高水平。

朱世杰的算法，被现代数学家吴文俊直接继承和发展，成为机械化证明的代数基础。他曾对四元术稍加改进(实质上无非是朱世杰四元术的现代推广形式)，在一个容量不大的计算机上很容易地求出了两个三元三次方程组的解。而有人采用现代方法，在计算器上求解时竟然有一个未能解出，另一个也要动用计算机很大容量和花费很长时间才能算出。鉴于朱世杰著作中就出现过有三个未知数高至三次的方程组，可以想像中国古代算家着眼解题，重视实效，其思想之深邃与效率之高是一般人难以想像的[①]。

将多元方程组化归为一元方程，乃实现数学机械化的关键问题之一。在欧洲更系统的消元法研究则出现在 18 世纪末一些数学家如法国的 E. 别朱(1730 – 1783) 等人的著作中，然而迄今国外并没有完整的求解非线性多项式方程组的方法，惟一完整的方法是我国的吴文俊在 80 年代发现的三角化整序法，国际上称为“吴方法”。“吴文俊消法”即是以“天元术”、“四元术”为基础创造发展而来的，是将中国传统数学的构造性和机械化思想以及几何代数化方法应用于当代数学前沿 —— 几何定理机器证明研究的结果。该法就解多元多项式的方程组来说，是当今世界上惟一能包括一般情形的完整算法，目前流行的主要符号计算软件，都实现了这种算法，该法还在数理科学、系统科学、理论物理和计算机科学等基础科学领域中获得了成功的应用，并在机器人运动学、机械机构设计和计算机辅助曲面造型设计等方向上发挥作用。

---

① 吴文俊，对中国传统数学的再认识，百科知识，1987 年 7、8 辑。

第 10 章　从筹算文化到珠算文化

10.1　中国的珠算文化的兴起

中国数学长期使用算筹，因此中国数学文化被称为筹算文化。随着数学的发展，算筹和筹算也不断得到发展。例如，公元 3 世纪刘徽使用不同颜色的算筹表示正负数，红筹表正数，黑筹表负数；隋代则以不同形状的算筹表示正负数：三棱柱状的表正数，四棱柱状的表负数。算筹变小(周长 0.59 厘米，长 8.85 厘米)。随着求解高次方程，求解同余式组和高次方程组的研究，筹算的摆法也不断发展，不仅能摆出四则运算、乘方、开方等代数运算，而且包含了特定筹式的演算：不同的位置用来表示特定的数学意义，如比例不同的项、不同的未知数、未知数的不同次数等，布列算筹的方法日趋巧妙，解决了一系列重要的数学问题。筹算的算法也日趋简明化、模式化。到了宋元之际，形成了一系列诗一般的筹算口诀，口诀有利于人们记忆和应用筹算算法，加快计算速度，其中相当一部分口诀(乘除法口诀)以珠算口诀的形式流传至今。

珠算是以算盘为工具进行数字计算的一种方法。“珠算”一词，按现存资料，最早见于汉代徐岳撰《数术记遗》，但按北周甄鸾注，不是使用算盘的算法，与后来所谓“珠算”(用算盘)的意义不同。从文献分析来看，“算盘”一词最早出现于元代刘因(1248～1293)在《静修先生文集》中的一首五言绝句的题目；元代画家王振鹏作《乾坤一担图》(1310)中货郎担的货中有一算盘；元末陶宗仪在《南村辍耕录》(1366)卷二十九“井珠”条中有“算盘珠”比喻；元曲中也提到“算盘”，可见，元代已应用了算盘。

现代认为，从明代起，算盘渐渐取代了算筹、珠算取代了筹算。现存载有算盘图的最早文献是明洪武四年(1371)刻的《魁本对相

四言杂字》一书。现存最早的珠算书是徐心鲁订正的《盘珠算法》(1573)。流行最广、在历史上起作用最大的珠算书则是明代程大位编的《算法统宗》(1592)。

珠算的算法，常用口诀来表述，在一套口诀的指导下拨珠即可完成计算。加减法口诀，为珠算所特有，最早见于吴敬的《九章算法比类大全》(1450)。乘除法口诀，采用的则是筹算口诀。乘法"九九"口诀，在春秋战国时已在筹算中得到应用；归除口诀，首见于杨辉的《乘除通变算宝》(1274)，朱世杰的《算学启蒙》(1299)所载九归口诀已与现代基本相同。有了四则口诀，珠算的算法就形成一个体系，长期沿用下来。

构成中国古代数学的机械化算法体系的基础就是算筹这一种算器及其基本运演形式。在人类的文明史上，中华民族在两千多年的时间里长期依靠这种直观的、具有符号特征的、可操作运演的算器，表明了人类古代数学的一种代表性倾向的算法特征，它与古希腊数学代表了人类古代数学的算法和演绎的两种发展趋势[①]。

中国古代数学建立在算器的机械化算法体系，是一种技艺型的价值取向，从此意义上来说，中国古代数学在经历宋元时期的特定历史阶段之后走向明代实用的珠算是一种历史的必然。笔者认为，从算法机械化的角度，有必要对珠算在中国古代数学中的历史地位给予足够的认识和评价。

宋元之际中国古代数学发展的高峰也是筹算发展的高峰。明代以后，筹算渐渐为珠算所取代。

珠算从明代以来，在中国日益流行，现在已成为人们的重要常识之一。它先后流传海外，如日本、朝鲜、东南亚各国，近年来更传入美洲、欧洲等地，并日趋流行。一个发人深省的问题是：为什么在电子计算机日益普及的今天，人们仍然十分重视珠算呢？除了它的良好的计算性能外，人们普遍认为它具有独特的教育功能，这是任何别的计算工具都无法代替的。

---

① 李文林.算法、演绎倾向与数学的分期．自然科学史研究，1986年，第2期．

10.2　从数学的机械化特征看珠算及其发展

从筹算到珠算是数学机械化算法革新的必然要求。事实上，以筹算为基础的机械化算法体系有两种必然的发展方向：

一是筹算运演工具在运演操作中被改进或被创新（这一点同西方逻辑运演形式的改变，即严格化、形式化、符号化的改变有类似之处）。在人类的历史中，人类对任何应用工具都是在不断改进和创新的，尽管筹算在利用简单工具从事有相当广泛而复杂的计算方面表现了很强的优越性，但随着计算的机械化程度的提高，其纵横排列的制度及在运演中的不方便、占地大、易变动等缺点必然影响布算速度，特别是作为借助于算筹发展起来并作为改进筹算结果的乘除捷算法及其歌诀的出现和高度发达，与它赖以成长的躯壳产生了矛盾：口念歌诀很快，手摆弄算筹却很慢，得心不能应手，算筹这种工具已不适应歌诀带来的快速运算，加之筹算要求相当熟练的技巧，改进计算工具成为迫切需要。明代得到广泛应用的珠算，正是中国古代数学对算器本身进行改进创新的一个重要成就。珠算继承了筹算使用十进位置值制的全部优点，而又突破了筹算所受的空间限制，克服了筹算速度较慢的缺点，尤其适应了明代商业数学发展的客观要求。从筹算到珠算的演变，正是中国古代计算技术发展史中的一次重大科学跃进，这个演变过程经历了几百年的时间，凝结了数代人的计算实践经验。

二是算法的改革。筹算基本上是心算配合筹码记数的过程，在筹算中产生口诀，珠算依赖于算法口诀。珠算"既有横梁穿档的算盘，又有一套完善的算法和口诀"[①]。这是珠算产生的两个主要标志。前一条件相当于现代电子计算机的硬件，后一条件相当于软件，离开了软件系统，电子计算机就失去了应用的价值和功能，

---

① 梅荣照，从中国数学史的角度谈谈珠算史的几个问题，珠算史通讯，1985年第2期。

同样，没有相应算法和口诀的算盘是缺乏生命力的。推动筹算向珠算的演变，主要表现在乘除法的改进。算法改革大约始于唐代中叶，一直延续到元代末期，核心就是简化筹算乘除，设法变筹算上中下三重布位的乘除为在同一横列里施行的乘除运算，以减少算筹的移动，从而提高运算速度。唐代数学家还创造了"求一"方法，关键是把乘除数的首位数字化成一来演算。宋元两代算法改革更趋活跃，沈括的《梦溪笔谈》，杨辉的《日用算法》、《乘除通变本末》，朱世杰的《算学启蒙》，郭守敬的《授时历捷法立成》，安止斋、何平子的《详明算法》，贾亨的《算法全能集》，丁巨的《丁巨算法》等对算法的改革及其歌诀，多数可以应用到后来的珠算之中，为珠算的使用铺平了道路，许多歌诀已与现代珠算的乘法口诀几乎一致，所有这些乘除捷法都是适应唐代以后商业经济的繁荣而被逐步发展起来的，它们不但在当代的社会实践中起过积极作用，而且构成了从筹算向珠算过渡的必要桥梁[1]。

综上所述，中国传统数学是运用算器以机械化算法为中心而构成的数学模式，从中国传统数学机械化发展的规律和要求分析，筹算运演到珠算运演是中国算器发展的必然趋势，是以算器为运演形式的机械化算法体系的重大进展，是中国传统计算技术的一次重大改进。从此意义上说，明代珠算对中国传统数学的重要特征及其发展规律应该得到足够的理论评判的重视。

10.3 电子计算机是珠算模型的发展

近代科学的发展促进了计算技术的发展。新的计算要求又促进了计算工具的改进。从世界范围看，17世纪初对数的引入使人们有可能以加减运算代替乘除运算，依此研制成功对数计算尺，此后，种类繁多的计算尺被广泛应用。与此同时，机械式计算机也相继问世。在此基础上，经过多年的改进，出现了各种各样的手摇计

[1] 梅荣照，唐中期到元末的实用算术，宋元数学史论文集，科学出版社，1966年。

算机，风行于世界各地。这种计算机在17世纪末就传入我国，当时中国有人仿制了12位数的手摇计算机，并独创了一种算筹式手摇计算机。自20世纪30年代，人们开始研制机电元件的程序控制通用计算机。电子计算机产生至今50多年里，其本身有了极大的发展和变化，其功能已远不止是一种计算工具，它已渗入人类几乎所有的活动领域，正改变着整个社会的面貌，使人类历史迈入一个新的阶段——信息时代。

然而，电子计算机采取的是珠算模型而非笔算模型，珠算是电子计算机之母。以5+2的计算说明如下：

笔算		珠算		电子计算机
模型	算法语言	模型	算法语言	算法语言
5 +2 7	A=5		A=5	A=5
	B=2		A=A+2	A=A+2
	C=A+B		A=7	A=7
	C=7		A表示一档	A表示为一个储存单元
	A、B、C各表示一个数			

首先，从算法语言上看，电子计算机采用算法语言A=A+2，这用笔算或现行数学是解释不通其中的道理的。而用珠算模型解释就很自然：A表示算盘一档，A=5表示这档存入5，A=A+2表示在A档加2，这时A档存的是7。仔细分析可以发现：电子计算机与珠算不仅运算模型相同，而且系统相似，语言相应，程序相当，方法可以共享。珠算是形象化的电子计算机，电子计算机是以电子技术武装的珠算，两者并行不悖，相得益彰。

再从二者的计算原理及构成要件上分析，二者具有相通性，只是电子计算机分解得很细，分别用不同的部件来完成。我们使用的计算机大都沿用冯·诺依曼结构，它是以运算控制器为中心的，其最基本的组成框图如图10-1：输入要用“输入装置”（如键盘）；储存要特设“存储器”；运算要专设“运算器”；输出还要另设“输出

装置"(如显示器或打印机);此外,还要设"控制器"起到"读头"的作用;要人来掌握,还要有"控制台"等。例如将某存储单元中存放的操作数取出送往运算器中进行运算,再把运算结果送回指定的存储单元中,当运算完成后,就可以根据指令序列将结果通过输出设备输出。

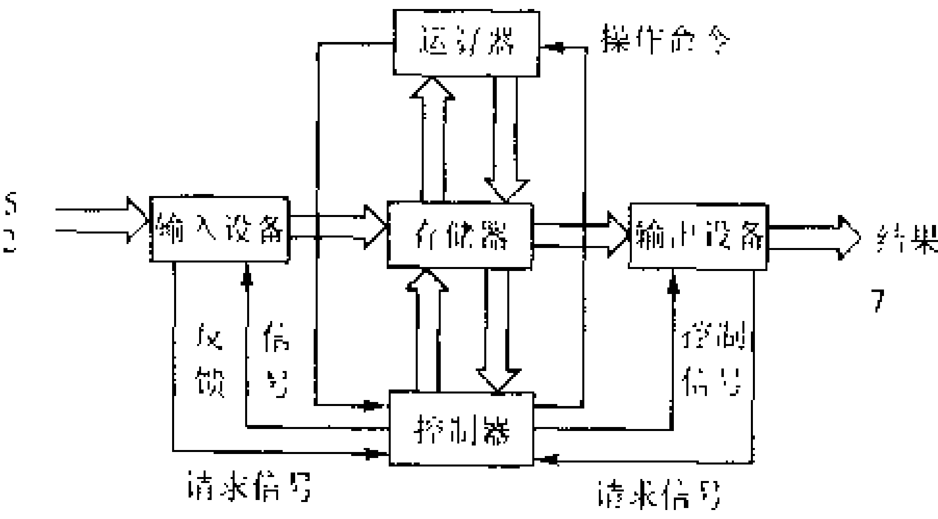


图 10-1 计算机简单框图

相比于计算机,珠算在此方面的优越性在于它的"一体化",即集输入、运算、存储、输出为一体。如以上 5+2 的计算例子,观察图 10-2 可知,珠算把输入、储存、运算、输出融为一体,靠梁拨 1 是输入,也是作加法运算,储存在梁上(是内态),也是输出、新输入;再向梁拨 6 是输入、是运算(拼排自动得 7),是储存 7,也是输出 7。

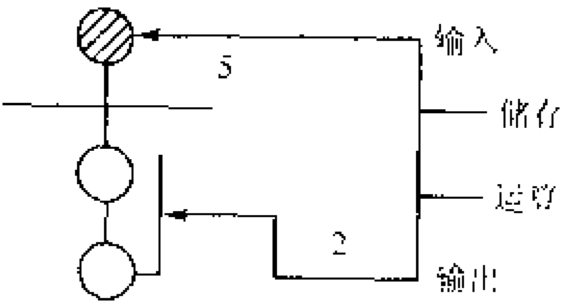


图 10-2 珠算

珠算的"一体性"比电子计算机分解成各部件分别完成好,但受现在的技术条件限制,目前尚不能使电子计算机也具备一体性,这将有待人们今后进一步的努力。

不仅如此，作为中国文化宝库中一件珍品——珠算和算盘，既是一种优越的计算工具，又是一种好的教具和学具。就在计算机、计算器以铺天盖地之势向当今社会袭来之际，珠算依然发挥其特殊的价值和作用。首先，由于珠算具有"一体性"，从而使其运算模型透明，能把运算操作与实际问题直接沟通；加之其运算模型至为简捷(只是拼排珠码，最省储存空间)等，所以，无论是手拨算珠的"手珠算"，还是将其模型内化进脑子里的"脑珠算"("心珠算")，相对于笔算、尺算、电子计算机等来说，都是最容易教学教练的，而且能获得高效，能引起孩子们的高度兴趣。相对来看，电子计算机是"黑箱"，用电子计算机教学，难以使人理解电子计算机的原理和机制，对于素质教育是不利的。再如，通过珠算能培养孩子高效(甚至神奇)的心算能力，而通过计算机就没法培养心算能力。

其次，珠算和算盘相比于外国使用计数板、计算块及小棒等认识数和计算数能够更好地起到从具体到抽象的中介作用。例如，教学认数时，如果用计数块表示"一百"就要用100个正方块板来表示，这种直观表示尽管对儿童学习认数是十分重要的，但还需进一步加以抽象，用数直接表示。而利用算盘，"一百"可以用算盘百位上的一个珠表示，用十位、个位空档，表示那两个数位上没有数。"三十四"可在十位上拨3个下珠，个位上拨4个下珠来表示，这种表示法与抽象的数字表示法本质上是一致的，在此基础上再抽象出"34"这种数字符号就容易了。因此，算盘起到了上述的中介作用，而且有助于学生形成数位顺序及数位大小等清晰的表象，从此，学生认识数的能力提高了。

第11章 儒家文化与数学机械化

11.1 “经世致用”与数学机械化

中国儒家文化思想的一大特点是“经世致用”。古人把经纶天下，治国济民作为理想的目标，重视的是人际关系。通常认为，古代文化有希腊、中东和中国三种类型。希腊型文化注重人与自然的关系，中东型文化注重人与神的关系，中国型文化注重人与人的关系[①]。儒学的人文本位思想和道德伦理成为中国传统思想文化的主要部分。《论语·述而》说：“子以四教：文、行、忠、信。”孔子希望他的学生都能成为“君子”，即成为一个德行超群并具有治国安邦之才的政治家，对于道德和技艺的关系，孔子认为应当“志于道，据于德，依于仁，游于艺”，即对于道德仁义，要必志、必据、必依，而对于技艺，则只要游于其间便可。先秦儒家三个代表人物——孔子、孟子、荀子对于数学和其他科学技术的态度基本上是一脉相承的，都视数学和其他技艺为“小道”，如孔子所说：“虽小道，必有可观者焉；致远恐泥，是以君子不为也。”孟子以分工论“有大人之事、有小人之事”，将技艺统称为“小人之事”，并认为这应由“劳力者”之“小人”去干。《荀子·富国》明确提出：“兼足天下之道在明分。”荀子也认为计数之术亦只是“官人使吏”之事，不可达于君子之道。《荀子·君道》说：“计数纤啬而无敢遗丧，是官人使吏之材也。”这些观点，代表了孔子及整个儒家对于数学以及其他科学、技术的基本态度，对后世产生了非常深远的影响。如南北朝时的颜之推所说：“算术亦是六艺要事，自古儒士论天道定律历者皆学通之，然可以

---

① 程宜山，中国传统文化的特质和价值，中国社会科学，1985年，第4期。

兼明，不可以专业。”[1] 中国传统思想的这种特点表现在人生观上，主要是入世的、积极进取的态度，例如“学而优则仕”，出仕的目的在于“经世致用”，这是中国封建社会里儒家思想的原则之一，在中国古代社会里长期处于主导作用。

中国古代“经世致用”思想在认识论上的一个重要表现是“实用理性”，它指的是“与生活实际保持直接联系的实用理性，不向纵深的抽象、分析、推理的纯思辨方向发展”[2]。也就是说，中国古人的思想与实际应用的联系十分密切。社会实践是产生和发展社会思想的基础，是各门科学发展的根本动力，数学也不例外。中国古代数学思想方法属于中国古代社会思想文化的一部分，实用思想对中国传统数学的发展产生了重大的影响。中国传统数学机械化的思想产生有着经济、文化及数学自身等各方面的原因，但儒家传统的思想不能不说是其中的一个重要因素。

第一，与古希腊数学追求纯粹“理念”恰成强烈的对比，中国传统数学具有以应用为主的思想，以解决实际问题见长的特点。《九章算术》即是以术文统率应用问题的形式。刘徽非常重视数学的作用，他在《九章算术》注中说：“其能穷纤入微，探测无方。”《孙子算经》序中说，数学的作用在于“立规矩，准方圆，谨法度，约尺寸，立权衡，平重轻，剖毫厘，析黍絫”，可以“观天道精微之兆基，察地理纵横之长短，采神祇之所在，极成败之符验。”秦九韶对“通神明，顺性命”的数学之大者，“肤末于见”，而专注数学之小即“经世务，类万物”方面，“设为问答以拟于用”，撰成《数书九章》。李冶也说：“术数虽居六艺之末，而施之人事则最为切务。”这些都反映出儒家学以致用、注重符验的思想方法对历代数学家的深刻影响。中国传统数学的这种特点促进了中国传统数学向计算方向发展，并在长期的筹算机械化的计算技术方面取得伟大成果：一方面，满足于生产、生活实际问题需要的计算是机械化思想发展的巨大动力。

---

[1] 南北朝（颜之推）.颜氏家训·杂艺.诸子集成（第八册），第45页，1986年。

[2] 李泽厚.秦汉思想简议.中国社会科学，1984年，第2期

社会生活和实践对计算不断提出新的要求，而解决计算问题的最好办法莫过于找到处理问题的有效算法，这就加速了算法化思想、内容的不断提高，促进了对计算方法和解题程序的改进，这是促进中国古代数学发展的关键因素。另一方面，从中算理论自身特点来看，传统数学以算为主，强调实用，讲究效率，注意结果，倾向于发展有应用前景的成果，造成机械化算法的长期发达，以筹为工具发展程序化算法，这些中算的特长又为数学的机械化提供了"技术"的条件和理论的依据。但是，中算理论的机械化算法表达形式，主要是满足对应用问题数值的追求、程序步骤的改进，而不便于原理的阐发和数学理论的构建，从而带来了数学理论薄弱和缺乏严格的逻辑体系。比如《九章算术》"方程"章中，以矩阵形式解决线性方程组已发展得相当成熟，但是中国数学对"矩阵"的筹式构造，只被用来解决线性方程组，而没有兴趣将之作为一个专门的理论加以研究，因而自然建立不起独立的矩阵理论。

第二，重视社会实践与数学发展相联系的实用思想，导致算法结果数值化的要求。受实用思想的影响，在数学发展中，中国古人习惯于将问题数值化，利用具体的数值计算来解决一系列复杂的应用问题或理论问题，如前所分析的，即便是几何图形的许多问题，也是转化为数值问题的计算来求解，具有明显的几何代数化的思想倾向。这种数值化思想一方面与中国数学一直出色地使用数值工具——算筹有直接的联系；另一方面又是实现数学机械化算法操演的直接结果。可以说，数值化的思想在算筹的使用和算法程序的具体操演中得到发展和巩固，它不仅使中算家在分数、比例、方程等诸多领域中创造出许多巧妙的程序算法，而且以自己独特的方式和形式处理了许多理论方面的问题。如中国在世界上最早使用了十进小数，刘徽曾指出尺、寸、分、厘、毫、秒、忽七个长度单位，忽以下称"微数"，"微数无名者，以为分子，其一退以十为母"，这就是十进小数了。但另一方面，由于采用数值化思想，而一般不依靠严格的演绎论证，这种在开方不尽以十进小数近似表示无理数的方法，就不会发生古希腊那样的无理数危机，自然也避免

了无理数的理论的深入探讨。

吴文俊先生指出：用算法及可计算性的观点来分析中国古代数学，发现中国古代数学传统与古希腊延续下来的近现代西方数学传统的重要区别。

中国古代数学的算法化和数值化的计算思想与数学实用思想有着直接的联系，正是把数学应用到社会生产及生活的各个领域才引起了对数值化和计算机械化的要求，从而才促进了对算法的研究并构造出切实可行的机械化算法来。

由于中国古代数学的实用性思想和算法化、数值化的计算思想重视的是构造出可利用算筹计算的机械化算法，并不需要探讨这种算法所依据的数学原理，虽然算法机械化达到相当高明的程度，但对有关的数学原理不作深入系统的探讨，这在一定程度上影响了严格理论体系的构建，不过从另一个角度看，中国古代的计算思想不仅使中国古代数学取得若干具有世界历史意义的光辉成就，而且提供了一种用计算方法来解决问题的思想和能力，这种思想和能力在近代，特别是现代数学中得到长足的发展，计算方法已成为一种重要的一般的科学方法①。

11.2 《周易》筮法对传统数学机械化程序的影响

《周易·系辞传》提供的筮法，是一种有代表性的原始数学的操作运演，这种计算活动，突出了机械化思想方法的运用，为此我们来分析筮法的操作过程：

《系辞传》称："大衍之数五十，其用四十有九。分而为二，以象两；挂一以象三；揲之以四，以象四时；归奇于扐以象闰；五岁再闰，故再扐而后挂。扐是故四营而成易，十有八变而成卦。"

这是一套严格的程序。对此，根据传统易学的一般解释，筮法操作由以下三步完成：

---

① 冯康，计算——新的第三种科学方法，百科知识，1985年，第5期

"一变"：取蓍草 50 根，去其一以象征太一即太极，把剩余的 49 根随机分成两堆，以象征天、地"两仪"，然后在其中一堆中取出 1 根不参与计算叫"挂一"，与原来两部分一同象征天、地、人"三才"，将此时两堆蓍草分别按 4 根一组来分组，叫"揲四"，以象征春、夏、秋、冬四时，将所余的奇数（或一、或二、或三、或四）根蓍夹在手指间叫"归奇于扐"以象征闰年，于是两堆"归奇"的蓍数非 4 即 8，加上"挂一"那根，共去掉 5 或 9 根，即"初一揲不五则九，是一变也"。

"二变"：用一变余下的 44 根或 40 根蓍草，重复上述过程，即所谓"第二揲，不四则八，是二变也"。

"三变"：用二变余下的蓍草再重复上述过程即所谓"第三揲亦不四则八，是三变也"。

最后余蓍草数为 9、8、7、6 四象数之一。若得 9 或 7，则叫"阳爻"，用"—"表示，若得 8 或 6 则叫阴爻，用"– –"表示，这样由三变确定了一个爻，取 3 爻则有 $2^3=8$ 个经卦，取 6 爻则有 $2^6=64$ 个别卦，可事先确定 8 卦或 64 卦的意义，从而可用占筮之法预测未来了。

从数学方面来考察占筮过程，其特点有二：一是计算程序确定；二是计算结果确定，必为 6、7、8、9 四数之一。占筮总是不断机械重复这样两种运算：

运算 p_1：

$$R_1+R_2=N$$

$$R_1-1\equiv r_1(\mathrm{mod}4)$$

$$R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}4)$$

运算 p_2：　$N=N-r_1-r_2-1$

从《周易》筮法的机械化程序及其产生的影响来分析，以下三点值得注意：

一、关于"变"的程序

《周易》的占蓍过程所用一变、二变、三变、四变来表达其机械

化程序，对后世数学中的机械化程序表述产生了深刻影响。《九章算术》中虽无"变"的名称，但由于几乎所有的问题都必须计算出具体的数值，各种术文全是可操作的计算公式或计算程序，求解的过程即是对各种算法的程序操作，其实就是"变"。《九章算术》及其刘徽注中的整个算法体系可以看做是建立在对筹式的一系列操作变换的机械化程序，到秦九韶，则明确用到了"变"，从秦九韶大衍九问的演草可见，秦氏"元数格"是对于 n 个元数分为 $n-1$ 变来进行化约的机械化程序，只是在元数个数不多时不必累赘地标明"变"数。他的正负开方术，在表述其中的机械化程序里也采用一变、二变、三变、四变的方式。《数书九章》卷五"尖田求积"一问需求解一个四次方程，其原筹图下所附的注文中有："以商生隅入下廉，——一变；以商生下廉入上廉内，相消——以商生上廉入方内相消——以正负方相消。以商生隅入下廉，——二变；以商生下廉入上廉。以商生隅入下廉——三变。方一退，上廉二退，下廉三退，隅四退；商续置——四变。"以上前三变相当于古开方术中确定除数的过程，是减根变换，其特点是累乘累加；四变是扩根变换，目的是为了确定商的下一位。这四变构成一个具有循环特点的子程序，增乘开方法就是这样一个循环的累乘累加的机械化算法。此外，在卷六"环田三积"等问中，秦氏多次以"凡七变至此得……"、"凡九变至此得……""凡十一变至此得……"等等，来说明每一步计算的操作程序，机械化步骤特别明显。

二、关于"易简"的程序

《周易·系辞上》谈到关于"易简"的变换原理："乾以易知，坤以简能。易则易知，简则易从。……易简则天下之理得矣。"可见"易"与"简"同义，"易简"就是简约、简明之意。这种思想被数学家所继承，成为化约求解过程的程序化和简洁性的追求方向。《周髀算经》中陈子与荣方问答中就有"夫道术言约而用博者，智类之明"，并谈到"问一类而以万事达者，谓之知道"。关于本句的赵爽注文是用《周易》来解释的："引而伸之，触类而长之，天下之能事毕

矣，故谓之知道也。"由此更可见其思想与《周易》的渊源关系。《九章算术》及其刘徽注受其影响更是深刻，《九章算术》术文大都精粹，程序步骤简明，比如刘徽在对"方程"章作注时就说过："从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣。"其意道出，《九章算术》从简易考虑，未谈及齐同，如果用齐同原理来分析，道理就清楚了。《九章算术》术文"简约"的特点本身是构造机械化算法的基础，且简约、具体的步骤便于操作，因此从"易简"到机械化是自然的事。刘徽本人也十分推崇"简易"，他创立互乘相消法替代直除法使运算程序大大简化，他对开方程序的改进，将"除实"解释成以"议所得"乘"法"减实，及其保留借算，通过退位求减根方程的方法等等，都充分体现其"易简"的思想，这和古算机械化的要求是一致的。对于"方程"术，刘徽术文是与《九章算术》稍有不同的两种方法。刘徽认为，创造新法的目的在于运算约简："所以别为法，约也。"但通过与《九章算术》的方法相比，他认为"用算繁而不省"时，既然达不到目的，因而又说："然犹不如用其旧。"刘徽在《九章算术·方程注》中总结说："夫数，犹刃也，易简用之，则动中庖丁之理。故能和神爱刃，速而寡尤。"

三、关于"类"的思想

《周易》中关于"类"的思想特别明显。《易·系辞上》："方以类聚，物以群分。"又《易·乾》："各从其类也。""言约"与"智类"有密切关系。《周髀算经》陈子与荣方问答中就有"夫道术言约而用博者，智类之明"，"问一类而以万事达者，谓之知道"。在此基础上进一步提出"类以合类"的思想："是故能类以合类，此贤者业精习智之质也。"赵爽在注文中进而解释到："俱学道术，明智不察，不能以类合类而长之，此心遊目蕩，义不入神也。""类"与数学机械化有密切关系，因为作为机械化的算法特点之一就是普适性，即要普遍适用于解决同一类中的其他问题。中算家通过将各种问题归类，抽象出这一类数学问题的模型，然后给出一般解法，以达到总结、归纳出每一类问题的机械化算法的目的。《九章算术》将各种问题按

性质分九章，每一章就为一类，比如少广章、盈不足章、方程章和勾股章是按方法分类的；方田章、粟米章是按问题应用分类的。在每一类中，又按不同的数学方法分成更细的类。《九章算术》的主要部分或采取几个例题一个术文，或一条术文统率几个例题的形式，对每一类问题，给出问题的一般解法，以建立统一规范的机械化程序。刘徽构建的“数学之树”其实就归结于他的归类思想，他在《九章注序》就说：“事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，发其一端而已。”刘徽分类的思想，不仅体现在对数学概念的分类上，对同一问题从不同的角度考虑，而且更多地体现在对数学方法的分类上。例如刘徽把今有术看成统属经率术、衰分术、返衰术、均输术等若干重要方法和其他许多问题解法的“都术”，就是对《九章算术》的重新分类。在方田章中有“方以类聚，物以群分，数同类者无远，数异类者无近。”在方程章中有“益行减行，当各以其类矣。”在勾股章中有“令出入相补，各从其类。”通过事类相推，刘徽把数学知识整理成一个“约而能周、通而不黩”的完整体系。

从类的思想出发，《周易》还提出“触类而长”的观点。《易·系辞上》：“引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣。”《易·系辞下》：“天下同归而殊途，一致而百虑。”《周易》的这种思想也为刘徽所继承。刘徽《九章注序》说：“暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉。”他又说：“度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。”刘徽之所以能建立一套套规范而简约的机械化算法，与他的“引而伸之，触类而长”的思想是密切相关的，如他把“率”视作“算之纲纪”，将三率连比推广到多率（均输章），将两组率推广到多组率的机械化程序：“放此，虽四五转不异也。”他发展“齐同”术，说：“然则齐同之术要矣，错综度数，动之斯谐，其犹佩觽解结，无往而不理焉。”刘徽还将方程章中二元方程推广到多元的机械化程序（如方程章第 7 问）。他还模拟日高公式，逐步推广，顺利解决《海岛算经》9 题等等都得力于此。刘徽《九章注》术文在拟一题多解并阐发其原理时，他的殊途同归的思

想有诸多表现,概源于此。如方田章提出总的约分术,刘徽为了阐明分子、分母扩大或缩小同样的倍数,分数值都保持不变,说:"虽则异辞,至于为数,亦同归尔。"当用三种方法说明分数乘法程序得同一结果时,他又说:"所从言之异,而计数,则三术同归也。"在勾股章当取股上小勾或取勾上小股得同样结果时,他总结说:"言虽异矣,及其所以成法实,则同归也。"

11.3 《周易》与中国古算机械化的文化启示

从数学文化的角度看,中国古代是借助于竹棍为特定物进行数字、数学操作运演的。竹棍既是中国原始计数物又是某种神秘性的表示物。早期中国原始巫术中的蓍草就是运用竹棍或类似竹棍的排演操作来表示某种神秘性的。《周易》中的揲蓍之法就是一种有代表性的原始数学的操作运演,把自己的神秘性、数量性特征组含在竹棍的排演形式之中。《周易》给后人带来数学观的最大影响是天人合一自然观的象数学的发展,属于数术。比如,刘歆的《三统历》和杨雄的《太玄》实际上都是配合《周易》而阐发天人宇宙论的一种数学图解。《数术记遗》主要是数术著作。祖暅之一面传授数学,一面著《天文录》,大谈占星术。《五经算术》就是以数学讲解、阐释五经(《易》、《诗》、《书》、《礼》、《春秋》)经义,其中有"《周易》系数法"名目。宋代沈括在《梦溪笔谈》中也讨论过揲蓍之法。虽然在中国古代,数术和数学是很难截然分开的,但由于在某种程度上数术取得了比数学还要高的地位,实际上二者在后世却又是逐渐分离的,各自走出了不同的发展道路。《汉书·艺文志》有"数术"类而不载《九章算术》就为一例,王孝通在《上缉古算术表》也说:"六艺成功,数术参于造化。"秦九韶在其《数书九章》序中写道:"今数术之书,尚三十余家,天象、历度谓之缀术,太乙、壬甲谓之三式,皆曰内算,言其秘也;《九章算术》所载,即周官九数,系于方圆者为叀术,皆曰外算,对内而言也。"在秦氏看来,"数"是泛指"数术",他将与"算术"的脱离归咎于"内算"、"外算"之别,数学乃是

"数术"中的一类"外算"而已。尽管他主张"其用相通，不可岐二"，视"通神明、顺性命"为数学之大者，几十年的数学研究后却感叹"肤末于见"，而专注于"经世务、类万物"之小方面、"设为问答以拟于用"而成《数书九章》。因此，中国古代数学实际上是作为"数术"下的外算由以神秘性为主要特征的竹棍占卜的《周易》竹棍排演体系，逐步摆脱了神秘主义的影响，而演化为以数量性特征为主而形成的筹算的运演体系，依靠编造某种具体实际生产、生活中的例子来表现自己的数量运演作用，使之与社会实践紧密结合，解决实际问题。《周易·系辞上》说："是故，形而上者谓之道，形而下者谓之器。化而裁之谓之变。"在中国文化的特定氛围中，筹算主要是作为发展数量意义的操作运演而成为适应这种文化意义的一种技艺。数学泰斗刘徽在《九章》注的序中把筹算处于《周易》解释意义之下的技艺应用地位说得十分清楚："昔在包牺氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术，以合六爻之变。"刘徽虽受《周易》影响将数学的作用概括为"以通神明之德，以类万物之情"两个方面，但却未见他在通神明方面的心得。中国文化中，筹算的价值取向就是建立在与社会实践密切联系基础上的应用技艺，并以快速、准确、简洁解决具体问题来发展自己的操作运演。中国传统的价值观念以及《周易》竹棍排演体系向筹算运演体系的转变，保证了中国古代数学算法机械化特色的发展方向，决定了筹算运演技术的长期发达。

第12章　中国传统思维与数学机械化

12.1　位置思维与数学机械化

研究中国古代数学的机械化思想，离不开对筹算体系的思维方式的剖析。

所谓思维方式，是指人们利用其观念系统理解、把握和评价客观事物的思维方法、思维习惯、思维模式的统一。不同民族、不同文化背景下的人们的思维方式是不同的，深深扎根于中国传统思想、文化之中的中国古代数学，其机械化思想必将受制于筹算体系的思维方式的特点，并在此基础上逐步形成自身的形式、运演规律和结构特点。从根本上说，中国古代数学的算法机械化是与筹算体系下的位置思维协调一致的：一方面，位置化的模式构造是我国古算机械化的基础，而依赖位置化的筹式演算，是我国古算机械化的重要体现；另一方面，中算家所采取的位置思维的方式和方法对数学机械化的作用一以贯之，中国古算受制于这种思维方式特点所体现的文化传统又是与中算家追求算法机械化的努力和谐一致的。

位置式思维是中华民族擅长的思维方式，在数学中值得重视。位置是人或物所在或所占的地方。位置和方向总是联系在一起，古代汉语中，方向和位置分别用单音节词"方"和"位"来表示。中国很早就出现了双音词"方位"，东汉张衡的《东京赋》中说："辨方位而正则，五精帅而来摧。"古代就是以相对确定位置的方位观来说明空间广延性的。如"宇宙"一词，就是表示空间之"宇"和表示时间之"宙"的复合。中国传统文化中，有七种计数的方位，即两

方、四方、五方、六方、八方、九方、十方。其中两方、四方、六方、八方、十方是偶数对称方位；五方、九方是奇数不对称方位，这是把中央、中间作为一种方位加进去而形成的方位总数。中国传统方位观，以两作为直线、平面、立体兼时间的方位之数，以四方作为中国人观念中牢不可破的对方位的基本划分，以八为二维空间的全方位之数，五方和九方是强烈地突出中央这一位置观念的产物，是中国方位观的独特之处。《周易·系辞传上》有"天地设位，而易行乎其中矣"、"河出图，洛出书，圣人则之"中的"河图"、"洛书"是传说中两个神秘的由不同数目的点和圈组成的九个方位图案。《数术记遗》提到的九宫即是在九个方格中分别填上九个数字构成九个方位划分的直观图。中国古人所采取的以方向、位置表示不同数学意义的这种十分独特的数学思想方法，在中国传统数学的筹式演算体系中从一开始就占据着核心地位。从最基本的十进位置值制记数法，到分数理论、比例理论、盈不足术、开方术、线性方程组，再到天元术、四元术、大衍求一术、垛积招差术、纵横图等等，几乎无一例外地打上了位置思想的印记。数学计算、推演均是以构造位置化的筹算模式为基础的，这种具有方便、直观、富有启发性的位置式表示，是与中国古算机械化讲求效率、推崇算法的简洁、直接和统一，注重结果的要求协调一致的，因而它为中国传统的算术与代数带来了极为丰硕的成果，而中国古算机械化的程度也随着位置思维的深入和延伸而不断提高筹算模式的构造和变换技术并达到相当高的水平。

一、位置模式——中国古算机械化形成的条件

中国是世界上最早产生并确立完善的十进位置值记数制度的国家。中国古代的记数制度，从商代甲骨文到两周金文，十进位置值制的思想一脉相承，到春秋末期又通过算筹的应用而最终得以完善。用算筹在平面上排列数字以进行计算，方位的利用是很自

[1] 吴慧颖，中国数文化，岳麓书社，第451—452页，1996年

然的事。算筹表数依据的是布位原理,从根本上说即是"位置模式",算筹用"位"区别不同的数,用上、下、左、右各种相对位置关系来表达特定的数量关系,算筹就按不同的排列构成筹式。对于筹算"排位数字"中位值的概念,李约瑟与王玲曾提出是由甲骨文数字中基本组成的字符演变而来的[1]。而有人通过分析甲骨文数字和筹算数字的构造及其演变,认为位值的概念产生于筹算数字本身,基本组数字符的出现与位值概念是有密切关系的,但后者不是由前者演变而来,可以推论筹算排位数字在商代之前已完成。筹算排位是非常先进的数学体系,在理论上,与现在国际通用的排位数字是完全相同的,只是在表达方式上有所不同:前者以算筹排列;后者以字符代表。在十进位置值制基础上发展起筹算位置模式,是传统思维的必然结果,这为中国古代数学向算法机械化方向的发展准备了外部条件。筹算不但为中国人提供了记数和计算的有力工具,而且自然地导出了分离系数这一重要的数学方法,而这一数学方法正是位置值制和算筹联姻的自然产物。算筹依据布位原理在算板上构造的位置模式,便是展开数学机械化活动的基础。利用分离系数法表达筹算的数字模式,都是按一定的规则、一定的方向进行的,并规定相应的演算程序,筹式可视为具有内在结构的数学符号。中算家利用筹算所提供的分离系数法,依据算筹的纵横布列,可以不需借助(或仅借助极少)文字或符号就能相当精确地表达多种多样的数学关系,其关键在于用算筹的不同排列和不同位置显示所描述对象的特定数值和结构特征。例如"方程"术,由于采用了位置制,可用分离系数法表示各行各未知数的系数及常数项,不必写出物品的名称,与现代矩阵表示法相近。天元术中的天元多项式表示,在决定了"太"或"元"的位置之后,算筹布列位置由上到下表示按降幂排列的未知数的不同次数,发展到四元术,则居中表示常数项,向四个方向顺次表示按升幂排列的天、地、人、

[1] Joseph Needham and Wang Ling, Science and Civilization in China (Cambridge University Press, 1959), Vol. 3, Sec 19, P53

物四个未知数及次数，其余位置表示不同未知数的乘积项，即每一项也由其与"太"的相对位置决定。由于位置的巧妙运用，从而使一些数学关系的表达和有关的运算得以大大地简化，对这些表达式进行相应的运算相当方便。自汉迄元，计算数学在中国越来越发达，算法机械化水平也越来越高，得益于优越的位置值甚多。

二、位置化的筹式推演——我国古算机械化过程的体现

我国古代数学计算、推演均是以位置化的筹式演算为中心，表现为较程序化的数字阵变换。通过构造性的手段、巧用方便、直观、富有启发性的位置表示，布列成一类筹算模式，然后用一套机械化的算法求出具体的数值解来，这是中国古代数学中最为醒目的一个标志。从本质上说，对分离系数法所表达的不同数学对象施行的各种变换，就是对其中由筹码所显示的数字进行机械的四则运算。由于每一筹式都规定了一套程序化的算法，即算筹进行布列变换的步骤，这种算法的模式化和程序化，使得筹算过程具有机械化的特点，只要步步按规则由筹码所显示的数字操作，就能机械地得出结果来。比如《九章算术》中的开方术，先是布置筹式，开平方作四行布算，从上到下依次为"议得"、"实"、"法"、"借算"，然后反复实施"超"、"议"、"除"、"折"的程序，在此基础上的增乘开方法则是对筹式实施相应的缩根、估根、减根、倍根的四个子程序，全部过程都通过机械的累乘累加来实现。"位"这一概念贯穿于整个术、注文之中，例如，"开方术"中，"超一等"之后的借算之值为 10^2，它就是要确定的"法"10^2a_1 的位，"开立方术"中，"超二等"之后的借算之值为 10^4，它也是要确定的"法"$(10^2a_1)^2$ 的位。就连刘徽关于"等"的注文，用位这一概念来表述，也会显得更加简单。如果不论及其几何意义，则所谓刘徽的注文"言百之面十也，言万之面百也"的意思就是：若被开方正整数的位是百，则平方根的位是十，故"等"为十；若被开方正整数的位是万，则平方根的位是百，故"等"为百，其余依次类推。刘徽关于"开立方术"的注文"且置一算定其位"中的"位"，实质上就是指由借算确定的"隅法"中所含的

这一类10的最高次幂时所在的位置，或者简单地说，就是这一类10的最高次幂。不过，对于"位"这一概念，术、注文并没有做出一般的说明，它潜于术、注文的字里行间，通常不容易为人们所察觉。事实上，不弄清"位"的意义就不可能进一步弄清"等"这一概念。又如，"大衍求一术"运算开始时先以位置布列筹式：左上、左下、右上、右下分别置1、0、奇数、定数，从而构成一个四角方阵（如图），运算中右上、右下两数辗转相除，同时将除得的商与左上、左下两数轮番增乘，直至右上数变成1为止，此时左上角数即为所求乘率。

左上	右上
左下	右下

=

1	奇数
0	定数

三、位置思维的文化启示及评价

从历史上看，数学的表述方式最初都是文辞式的，即对问题及其解的表述不用缩写和符号，而是写成一篇论说文。当数学发展到一定阶段，其表述方式也随之发展，主要有两类模式：一是使用表音文字的文化系统，倾向于发展符号式的表达，通常是取相应单词和第一个或前几个字母，最终形成今天通用的数学符号体系；二是使用表意文字（即所谓象形文字）的文化系统，倾向于发展位置式的表达。符号式和位置式这两种表述方式，直接的和表层的原因是受到相应的文字形式的影响，而在深层的意义上说，则是体现了这两种文明在思维方式上的区别，前者侧重于抽象的思维，后者侧重于形象思维。还应当指出，数学表述方式并不仅仅是一种记法，它对数学思维的模式与过程都是有影响的。从文化渊源上说，中国古人产生以方向、位置表示不同的数学意义这种十分独特的数学思维方法，是与《周易》唯象思维相关并受其影响的。《易·系辞传》称："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。"《周易》思维形式的一个重要特点是以卦象为工具的"唯象思维"，全书是以卦象为总领的。卦象即指阴爻和阳爻位置的异同和变化。《周易》的唯象思维，使得不同位置上的数（定爻的数）具有不同的意义。"乾坤成列，而易立乎其中矣。乾坤毁，则无以见易，易不可

见 则乾坤或几乎息矣"这种位置思想及其表示，尤其对天元术的表示和李冶处理勾股容圆等几何问题有相当大的影响。从人类文明进程中说，记数制度的选择对于一个古代民族数学的发展是有决定意义的。中国一脉相承的十进位置值制、算筹固有的位置模式和变换原理决定其内容侧重于算术以及与数字有关的代数、方程及其求解而非逻辑关系和几何性质，自然引导中国数学向以计算为中心、建立机械化的算法体系方向发展，并使中国数学机械化算法达到很高的水平。而对符号表达方式的擅长使古希腊人尽管在逻辑和几何学方面都取得了辉煌的成就，却不可能把精力集中在计算和求解上。再者，位置思维侧重于形象思维，中国位置化的筹算模式具有直观、形象、简洁、方便的特点，也容易发挥其直觉思维启示的功效，这与中国古算机械化讲求效率、注重结果、推崇算法的简洁直接和统一是和谐一致的，因而它能推动算法机械化水平的提高；另一方面，对计算效率的追求又必然刺激中算家致力于改进原有的算法和构造新的算法，但同时，由于过分依赖位置方法，未能发展适当的数学符号系统，不利于进一步的抽象和推广，不利于阐发一般规律。这种位置制、算具、筹算表达式以及算法的相互依存、相互作用和影响在一定程度上决定了中国古代数学的面貌。

12.2 构造性的思维方式与数学机械化

研究中国传统数学的机械化思想，离不开对筹算体系的构造性思维方式的剖析。中国传统数学机械化思想受制于筹算体系的构造性思维方式的特点。从根本上说，中国传统数学的算法机械化是与筹算体系下的构造性思维方式紧密联系，共同发展的，中算家所采取的构造性思维方式和方法对数学机械化起着重要作用，同时，中国传统数学受制于这种思维方式特点所表现出的明显的构造性质又是与中算家追求算法机械化的努力和谐一致的

构造性思维方式是数学中的一种重要的创造性思维方式。在

数学讨论中，常把能具体给出研究对象或对象的计算方法的数学称之为可构造性的。"构造性"一词迄今尚无公认的严格定义。按照现代直觉主义者（如布劳威尔，Luitzen Egbertus Jan Brouwer，1881－1966）特别是构造主义者的观点，对于一个数学对象，只有当它可以通过有限次的操作而获得，并且在每步操作之后都能有效地确定下一步所需要采取的操作，才能说它是存在的。按照这种思维方式，可以使概念和方法按固定的方式在有限步骤内能进行定义或得以实施，或给出一个行之有效的过程使之在有限步骤内将结果确定地构造出来。换言之，就是能用有限的手段刻画数学对象并针对问题求出具体的解来①。这种思维方式的基本特征是：

(1) 描述的直观性，即对讨论的对象能进行较为直观的描述。

(2) 实现的具体性，即不只是判定某种解的存在性，而且要实现具体求解。

一、中国古算机械化思想与构造性思维方式紧密相连，可以说是构造性思维方式作用下的必然结果，是构造性思维直接运用的产物

首先，中算家所关心的大多是较为实用的问题，理论研究密切联系实际，并在实际应用中得到发展。因此，中算家在解决问题时所关心的首先是如何得到可以直接应用的、可以方便地操作的解，而不会满足于仅仅知道解在理论上的存在性，这种纯粹的理论解对他们来说是没有多大意义的。其次，数学对象的存在性是由构造性的方法保证的，基本不使用反证法。"术"就是解决构造性问题的算法，具有一般性。种种算法虽繁简不一，之所以都可作为一套几乎可以照搬到现代计算机中去的机械化计算程序，是与中算家采取构造性的方式和手段以表达不同形式和层次的代数关系紧密联系在一起的。"中算家借助于构造性的思维方式和手段把实

---

① A. Calder: Constructive Mathematics, Scientific American, Vol.241 (1979), No.4；中译本，1980年

际问题化归为一类模型，然后用一套机械化的算法求出具体的数值解来，这是中国古算中最为醒目的一个标志。"[1]

由于构造性思维侧重于思维的构造性实践，即注重于获得结果并将结果构造出来，其特点在于从无到有的发明，这对数学理论的创造、发展和数学问题的解决都具有重要意义。中算家在诸如十进位置值制记数法、分数、比例、盈不足、线性方程组解法、开高次方以及天元术、四元术等的筹码图阵的模式构造，正是这种美妙的发明，正是借助于这些构造性的方法和模式，为实施算法的机械化准备了基础条件和必要的前提。比如，中国古算用"更相减损"求"等"的方法，其原理是运算过程中，实施"更相减损"的机械化程序，整数逐步减少，且总可在有限步骤内将其求出，故它是一种构造性的思维方法。又如开方和求一元二次方程的正根，就可按位置模式布列筹码图阵，依据开方术，在有限步骤内通过"超"、"议"、"除"和"折"的程序反复，将根求出，故它也是一种构造性的思维方式。

二、构造性的思维方式与中国古算的关系和作用，使中国古算表现出兼具构造性和机械化的双重特色

中国古算具有很强的构造性。在数学起源的问题上，有所谓"河出图，洛出书，圣人则之"的传说。虽然数学起源河图、洛书之说纯属无稽之谈，但作为心灵创造的幻方——洛书，最早出现在中国，确实显示了中国传统数学的构造性特点和中算家的创造才能。20世纪60年代出版的一本《组合数学》专著中，作者在书的开头就写道："组合数学，也称为组合分析或组合学，是一门起源于古代的数学学科，传说中国黄帝禹(约公元前2200年)在一个神龟的背上观察到纵横图，大约在公元前1100年，排列在中国开始萌芽。"[2]中国历代对易图的数理研究，从九宫图到各阶纵横图的构造规律，宋元时代的一系列代数学成果，如开方作法本源图的出

[1] 刘钝，大哉言数，辽宁教育出版社，第435页，1993年。

[2] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*. New York, 1962.

规、增乘开方法的完善和垛积招差术的表格化，都向人们显示了当时数学家对构造性问题的关心，它们在多大程度上受到数学家易图结构的影响，这是一个值得深入研究的方向。

中国古算的算法体系是建立在长期的以算筹为算具的筹图模式的构造基础上的科学传统，由于采用优越的十进位置值制，使分离系数法成为发挥筹算最大优越性的途径，从而使一些数学关系的表达和有关的运算得以大大简化，利用筹算表达的各种数学关系和算筹的纵横捭阖，中算家就可以在筹图上方便地解决许多计算问题。在几何问题的处理上，并不追求逻辑的完美，而是凭借巧妙的构图进行"析理"，以达到解释、说明乃至论证的目的。例如，中算家不考虑两条线段是否有公度的问题，而通过构造开方程序求出微数；绕过希腊数学家、哲学家的潜无限和实无限问题，而通过割圆术求得圆周率的精确近似值。所有这些都集中反映出对数学对象构造的智慧。

由于构造性特别强调运算可操作程度，其首要特征就是要从问题包括的信息出发，通过一系列有限的运算（主要指算术四则运算）求出解来，因而构造性往往是与算法的机械化特色联系在一起的。例如，对"方程"的筹算图阵及其程序设计，是数学构造性方法精彩的一例，首先，"群物总杂，各列有数，总言其实"，这是对每行中未知数的系数和常数项的安排，其次，"令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之"，这是对诸行关系的安排，"并列为行"又说明了为什么叫"方程"。由于"方程"模型及其解之特殊构造性，不仅决定了"方程"的可能性和解的惟一性的问题，而且决定了可以对它施行种种行的消元变换的过程，因而对"方程"解的构造性就与算法的机械化特色联系在一起。为保证既定的程序在有限步骤内得到结果而畅通无阻，中算家又引入负数及其相应的运算法则，使"方程"的解法更趋完善，这为中国古代数学的构造性及其算法的机械化特色提供了一个具有说服力的样板[1]。在中国古

[1] 刘钝，大哉言数，辽宁教育出版社，1993年，第235页

代数学中，除了"方程"算法之外，各种比例算法、更相减损算法、连环求等算法、开方以及增乘开方算法、垛积招差算法以及大衍求一算法等等，无一不具备构造性和机械化的特征，这也是中国古算在算法上长期居于领先地位且在今日仍然具有魅力的一个重要原因。

三、数学的构造性与机械化程序的一致性

吴文俊先生指出，推行机械化的前提是数学必须以构造性的方式进行。中国古算的机械化着眼于问题的求解，算家以设计出简单的程序求出其解答为目标，数学机械化水平的提高，往往得益于对数学对象或模式巧妙的构造性质。例如，贾宪三角形在中国古算中占有重要地位，主要原因就是它的构造性质与中算家要求算法机械化的努力和谐一致，增乘开方法、垛积术、招差术以及后来清代对组合数学研究都与贾宪三角形有关。中国古算基本上走出了一条数学构造性和算法机械化和谐发展的道路。从构造性和非构造性思维方式的关系来看，通常以非构造性方式研究的某些数学领域，如果从构造性的角度出发是可能趋近于半机械化以至机械化并促进其实现的。这与中国古算的处理方式有诸多不谋而合之处。

关于基本概念：中国古算中的一些重要概念，往往是由算法所定义或导出，如"率"为"凡数相与者谓之率"；小数是"微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母"；正负数是"今两算得失相反，要令正负以名之"；方根是"若开之不尽为不可开，当以面命之"；面积是"凡广从相乘谓之幂"……。由于基本概念即由算法导出，问题的构造性和解的机械化也就顺理成章了。

关于数学证明：数学定理的机械化证明须要构造性的数学。对机械化数学而言，只证明数学问题的存在性是远远不够的，必须

Wu Wen-tsun, Recent Studies of the History of Chinese Mathematics, Proceedings of International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986.

有具体的、确定的算法把解构造出来，当数学问题的解具体构造出来之时，它的存在性也就不证自明了，这正是中国古代数学证明的特点。由于中算家关心的数学问题一般都有直接的现实背景，如果问题的解在物理的或一般现实的意义上是存在的，在不超出当时数学能力的前提下，这些问题也恰好是比较方便得到构造性的解的。既然解已经构造出来，实际上已经实现了比单纯的存在性证明要求更高的证明。

四、对现代数学的启示

与非构造性方法相比，两种不同的思维方式，形成性质各异的两种数学倾向——"构造性数学"和"非构造性数学"。如同美籍华人王浩教授所指出的：前者是"做的数学(mathematics of doing)"，后者是"在的数学"(mathematics of being)[①]。胡世华教授在分析这两种倾向的不同和二者的对立统一关系的重要性时指出："构造性数学的倾向是用数学取得结果并把结果构造出来，侧重于思维的构造性实践(有限制地使用排中律)。非构造性数学的倾向是数学地理解问题和规律，建立数学模型形成数学理论体系，追求科学理想(可以自由使用排中律)。这两种数学是不能截然分开的。"[②]

由于构造性思维方式侧重于思维的构造性实践，因而具有明显的创造价值和应用价值。中国古代数学的构造性、机械化和计算性代表了数学发展的一个历史趋势，在一定程度上表现了与现代数学的内在深层的一致性。合理地继承和发挥古代中国数学研究的构造思想不仅是数学史家们的任务，而且也应当是中国数学工作者的责任。吴文俊机械化原理的创立，从思维到方法都受益于中国古代数学研究的构造性思想。随着现代计算机的发展，这种构造性思维的应用价值更为突出，因此，构造性数学也得到了越来

---

① 邓东皋、孙小礼等，数学与文化，北京大学出版社，1990年

② 胡世华，信息时代的数学，载《数学进展》，1988(1)。该文载入邓东皋、孙小礼、张祖贵《数学与文化》，北京大学出版社，1990年

越多的数学家的关注。从现代数学中的直觉主义者的观点来看，数学对象的存在性与可构造性是等价的，即使在常规数学的意义上，能够明确构造出来的对象也当然是存在的，而可以证明其存在的对象却未必都能方便地构造出来。根据他们的研究结果，构造性数学的要求实际上比非构造性数学（现代数学的主流）严格得多。在现代，构造性成果不断涌现，说明在某些情况下用这种观点来研究问题是大有裨益的，由此不仅可以得出新颖的、有时还是比较深刻的见解，而且这样得到的定理通常更加有用。例如，当某个数的存在性可以构造地证明时，那么这个数不仅在理论上，而且往往实际上可以计算出来，在应用数学的许多领域里，提供解答毕竟要比单是表明有解答存在重要得多，对于这些领域应用构造性数学肯定会大有益处。构造性数学作为数学中一个生机勃勃的学科，其前途是光明的。但是另一个方面，构造性数学又总是和非构造性数学紧密联系在一起的，必须对这两种数学结合起来研究，这正如胡世华所指出的："考虑到信息时代的要求，就可以看清楚：构造性与非构造性数学的关系，它们各自的重要性和前进方向，二者是不可缺一的。要使计算机为人所用，特别是使原来由人做的事让计算机来做，就必须使数学规律计算化、算法化，就要研究计算数学，研究构造性数学。但是研究用计算机来做事的可能性、有效性、可行性以至局限性，又非进入非构造性的研究不可。"

第13章　从中西文化传统比较看数学机械化

13.1　中西古代数学文化史的意义比较

中西古代数学在其民族文化中价值观念的差异，是我们数学史研究中应十分注意的问题。

中国古代数学的构造性、机械化的算法体系完全有别于以古希腊为代表的西方数学的逻辑风格和演绎体系。为什么会出现这两种不同风格的数学体系、数学思想？难道是民族智力差异所造成的？答案当然是否定的。数学文化史的研究表明，在人类文化发展过程中，每一种文化系统都有其特定的数学发展道路和构造模式，数学既是在某个文化系统中发生发展的必然反映，又是文化系统中一种文化的特定的表现形式，不同的文化传统往往作用于不同形式的数学乃至科学技术的结构形式，因此可以说，中西文化传统的差异是形成中西古代数学思想以及数学结构形式的差异的重要原因。换句话说，文化传统往往规定了数学发展的必然取向。

从中西古代数学文化史的比较意义上分析，形成中西古代数学的两种倾向：逻辑演绎倾向和机械化算法倾向，其作用与构造差异主要是由文化系统赋予的文化层次及其价值取向的差异造成的，这两种倾向的对立统一就构成了数学自身内在的矛盾运动和发展动力。

数学文化史的研究表明，人类古代数学作为文化系统中的一个操作运演的子系统，它从一开始就具有双重的功能（或称之为双

重的特性)，即数量性的功能和神秘性的功能[1]。而不同民族文化中的数字或数学都在特定的文化氛围中有某些神秘性，而且不同民族文化中的数学神秘性发展的道路是各不相同的。

从总体特征来说，希腊文化是崇尚理性、崇尚知识的文化。理性之被引入到人类文化，得益于数学中的演绎推理。在古希腊文化的发展中，原始数学同时具有神秘性和数量性的双重功能，并始终沿着二者统一性继承的轨道向前发展。古希腊数学与神秘性的结合，使得他们从宗教、哲学的层次追求数学的绝对性以及解释世界的普遍性地位，这正是古希腊数学完全脱离实际问题，追求逻辑演绎的严谨性的文化背景。

古希腊没有公认的神权，人们信奉的是多神教，而且神是完全被"人化"了的，这自然给予人们一种充分发挥想像力的机会。古希腊人在从蒙昧走向文明的过程中，于公元前8世纪丢掉他们的象形文字而采用腓尼基的拼音字母时，就吸收了埃及与巴比伦的数学成果，这时的古希腊数学，实际上是古希腊原始数学神秘主义与埃及、巴比伦的数学的结合体，这种结合创造了数学体系、数学运演与数学方法的广泛的神秘解释作用，这种文化传统正是古希腊数学具有强烈的神秘作用以及后来具有宗教、哲学特征的根本原因。古希腊借助于数学解释一切的文化传统使数学成为具有文化意义的理性基础。泰勒斯创立的爱奥尼亚学派研究的对象就是包括哲学与自然科学的自然哲学体系。毕达哥拉斯学派将数学着上宗教色彩，其"万物皆数"和追求"数的和谐"观念把数学的这两种功能牢牢地结合在一起，并使之运演操作，共同发展。古希腊最有影响的大哲学家柏拉图的唯心主义哲学，视数学存在于先验的"理念世界"之中，这时期的柏拉图的"理念论"同毕达哥拉斯学派的"唯数论"得到了结合，他们用"数"来解释"理念"甚至认为"理念"就是"数"，从而把数学的神秘性及数量性意义演化为一种哲学意义的数学理性。亚里士多德对数学哲学的发展做出了重要的贡

[1] 王宪昌，数学与人类文明，延边大学出版社，第58页，1990年

献。他认为“数就是宇宙万有之物质”、“数学对象是一种抽象的存在”，并指出抽象物是人类思维的结果，数学同物理学和形而上学均属于他所谓的“理论科学”。在古希腊与西方的天文、医学、逻辑、音乐、美术、宗教、哲学中，数学都发挥着理性的解释作用，并随着西方文化的发展而不断得以继承和强化。基督教神学逐渐吸收了古希腊用数学解释世界的文化传统，在托马斯·阿奎那（1225～1274）的努力下，把以数学为理性模式的自然科学以及由数学而产生的各观念都与神学结合起来，使得数学成为当时自然知识和神学相结合的这座大厦的基石。文艺复兴时期古希腊数学理性的归复使欧洲人知道了自然界是按照数学方式设计的，数学被认为是惟一的真理体系。“这个理论鼓舞了十六、十七甚至一些十八世纪的数学家的工作。寻找大自然的数学规律是一项虔诚的工作，它是为了研究上帝的本性和做法以及上帝安排宇宙的方案。”伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨等精心构造了一套数学的和物理的概念，整个科学思想借助于这些概念得到迅速发展。直到今天，西方著名科学哲学家波普尔还认为《几何原本》是一种对当时宇宙理论、物理理论给出“一切物理解释和论述的基本工具”[①]。英国哲学家兼数学家的罗素更认为在西方文化中“数学是我们信仰永恒的与严格的真理的根源”。他进一步总结说“数学与神学的结合开始于毕达哥拉斯，它代表了希腊中世纪的以至直迄康德为止的近代的宗教哲学的特征”[②]。

因此，从数学文化史的意义上分析，发端于古希腊的西方数学不仅仅是一个数学意义的运演操作系统，更主要的是它作为一种文化系统中起主导作用的理性解释系统，或者称之为一种理性构造的规范模式。在西方文化中，西方数学解释宇宙的变化、引导理性的发展、参与物质世界的表述，任何学科的构建都必须按照文化理性的要求模仿和运用数学的模式。用数学解释一切是西方数学

① [英]波普尔：猜想与反驳，上海译文出版社，第123页，1986年。
② [英]罗素：西方哲学史（上），中译本，商务印书馆，第64页，1983年

在与其适应的文化发展中获取的价值观念。

在中国文化发展中，我国古代数学筹算操作的机械化运演形成的计算体系来源于作为原始数学的竹棍操作运演在历史进程中的演化

中国古代是借助于竹棍为特定物进行数字、数学操作运演的。中国古代数学通常用于"经世务，类万物"的"算术"与"通神明，顺性命"的星占、历术本是一家，同归于"算"，只有内外之别。今人将这种"外算"与"内算"的双重功能，归纳成"算数事物"的算术性功能和神秘主义的解释性功能[1]。竹棍既是中国原始计数物又是某些神秘性的表示物。例如中国原始巫术中的蓍草就是运用竹棍或类似竹棍的排演操作来表现某种神秘性的。殷商时代的巫人手中的竹策既是算卦的工具，也是作历算的"筹"。作为代表性的原始数学的操作运演的《周易》中的揲蓍之法就是神秘性的解释形式。与古希腊以一种理性表现自己的解释力量，以脱离具体事例而表现自己的数量解释意义不同，中国原始数学从一开始把自己的神秘性、数量性特征蕴含在由竹棍的排演形式之中，是一种由以神秘性为主要特征的竹棍占卜的《周易》竹棍排演体系，逐步演化为以数量性特征为主而形成的筹算的运演体系，依靠编造某类具体实际生产、生活中的例子来表现自己的数量运演作用。中国原始竹棍排演的这种转变，使筹算具备了应用性、操作性和内隐性的功能，而不具备西方数学那种用数学理性解释一切的价值取向，而在中国文化的特定氛围中，筹算主要是作为纯数量意义的运演而成为适应这种文化意义的一种技艺，并发展成为一种计算运演发达的技术。从文化系统角度来看，筹算是一种用数量变化意义来解释实际问题的操作运演的应用子系统。筹算一般不直接参与理性的描述，可以说，在中国文化中，它长于对"形而下"的问题做出分门别类的数量的解释，为解决问题而制定各种算法，以算为主，算

---

[1] 俞晓群．论中国古代数学的双重意义．自然辩证法通讯，第14卷，1992年，第4期

理结合的特征赋予筹算解释"形而上"问题的文化功能。因此，数学的价值观念是通过发展技艺实用，而非理性思辨。如刘徽在《九章算术》注的序中说："昔者包牺氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术，以合六爻之变。"秦九韶也视数学为"数术"中的一类"外算"，使自己专注于"经世物，类万物"，"设为问答以拟于用"。在中国文化中，筹算的价值取向就是作为建立在与社会实践紧密联系基础上的应用技艺，并以快速、准确、简洁解决具体问题来发展自己的操作运演[①]。

因此，中国古代数学未形成以宗教、哲学的层次思辨自己的方法、结构形式，而是形成了专司具体数学问题的特征。中国古代数学在文化传统中的价值取向就是在筹算运演机械重复的条件下尽力构造简明的运演方法，并且准确迅速地解决实践提出的具体问题。

13.2 中国传统数学机械化的文化价值观

中国传统的价值观念以及筹算的技艺型价值取向，保证了中国古代数学机械化特色的发展方向，其操作运演系统又孕育了中国古代数学算法机械化的巨大成功。

中国传统的价值观念以及筹算的技艺型价值取向，决定了中国古代数学的发展和构造模式，这种筹算数学的价值取向保证了中国古代数学机械化特色的发展方向，注重数学实际应用的层次不断发展，机械化的计算技术和水平不断提高。中国古人借助于算筹这一特殊工具，将各种实际问题分门别类，进行有效的布列和推演，在率的算法、"方程"术、开方术、割圆术、大衍求一术、天元术、四元术、垛积招差术等方面都取得辉煌成果，在宋元时期，数学水平达到高峰。元代以后发展的珠算制是筹算制的发展改革和继续，是对算筹计算工具的重大改进和发展，大大提高了计算速度和

---

① 王宪昌，文化价值观与宋元数学，大自然探索，1995年第1期。

效率，简化了机械化的操作程序和繁琐步骤，是对计算技术改革的历史必然。可以说，中国传统数学在数量关系上是以算筹制为主线贯穿一起，以提高机械化的计算技术来解决实际问题为目标的。同时，文化价值观的传统特点也造就了一批传播和发展作为技艺数学的群体，这是促进数学机械化发展的人才优势，尤其是在相对稳定的文化环境中，其传统价值观念发挥了重要作用。

从数学文化的角度来说，中国技艺应用型的操作运演系统又孕育了中国古代数学算法机械化的巨大成功。中国数学以区别于西方数学的独特风格和特点，在中世纪世界数学史、文明史上灿烂的古希腊数学衰落之后，曾一度占据了世界数学研究的重心，直到14世纪初。从文化价值系统发展的阶段分析，我国的筹算体系和模式在宋元时期达到数学的高峰在很大程度上体现出算法机械化也达到最高水平。贾宪三角和增乘开方法是对《九章算术》以来开方程序的重大提高和创造，秦九韶的正负开方术又把增乘开方法发展到十分完备的境地，其大衍求一术也是在历代对"上元积年"推算基础上将"物不知数"问题解法发展到最一般的机械化程序。李冶的天元术更是对列方程算法的重大改进和突破，同时也是几何代数化思想的完美体现。从天元术到四元术，是由解一般高次方程向多元高次方程组发展的必然结果和要求。中国传统数学的辉煌成就标志着筹算体系下的机械化算法的巨大成功。可以说，我国在宋元时期算法机械化达到空前的高水平，是与传统数学文化价值观的要求相一致的，它是我国筹算文化排列模式和变换技术长期积累后的自然发展，是我国筹算体系下的数学计算以快速、准确、简洁解决一类具体问题而发展自己的操作运演的必然趋势和结果。

当然，中国古代数学并非没有理性研究和创造。中国古代数学的筹算体系和机械化特色，决定了它不可能形成如同欧几里得《几何原本》那样完整的演绎逻辑系统，而由于筹算本身的直觉启示、模型构造性特点以及特殊的运演排列的结构和形式，决定了中国古代数学是以解决实际问题为目的的抽象模型化方法、化归方

法，概括出一般原理、原则用以解决一大类问题的归纳和演绎方法相结合的有机统一，决定了中国古代数学以算为主、算理结合的主要特色。许多算法如开方术、盈不足术、割圆术、方程术、大衍求一术等等，算法步骤精细，一步一步推导十分明确，刘徽注重"析理以辞"，不仅使用了归纳推理，而且大量使用了演绎逻辑，在数学证明中主要使用了演绎推理。对几何问题多采取几何代数化的形数结合，"解题用图"。开平方、开立方和解高次方程的方法，都由几何模型导出，从图验法到宋元算家的演段法，其本质相同，通过构造性手段，阐明算法的合理性，体现"约而能周，通而不黩"的传统。

事实上，作为人类数学的发展道路之一，中国古代数学思想在数学历史发展中以及在现代的数学思想中都具有不可忽略的重要地位。中国古代数学不仅同古希腊数学一样代表了不同文化传统的数学形式，而且也是人类数学的一种不可缺少的思想方法，是数学家遵循的重要数学思维形式。因为从根本上说，筹算是一种计算形式的数学，在计算性数学的意义上，计算和逻辑证明是人类数学的两大特征，尽管逻辑证明在西方数学中占主导地位，但从西方数学发展史上可以看出计算所扮演的角色及其发挥的重要作用。笛卡儿的解析几何学就是计算运用所获得的巨大成功，在数学史上具有里程碑式作用的微积分，也是对无穷小量计算的结果。至于现代计算数学、计算机数学的发展则更可以说明在数学发展史上的作用了。因此，我们认为计算体系的数学以及由此而形成的数学思想方法对整个人类数学的发展产生了重大的影响。

13.3　评价模式和价值标准

由上文对中西古代数学文化史的比较意义上分析，中西古代数学的作用与构造差异主要是由文化系统赋予它的文化层次及其价值取向的差异造成的，可以说，西方数学著作的思维模式及其理性作用是不会在中国文化中出现的，因此，在古今数千年的数学发展中，形成不同时期、不同地域的中西数学的两种倾向：逻辑演绎

倾向和机械化算法倾向都是历史文化中的必然。以古希腊欧几里得《几何原本》为代表的逻辑演绎倾向和以《九章算术》为代表的机械化算法倾向交互作用,“轮流执政”,共同以各自的模式、思维方式、运演规律及结构特征对世界数学的发展做出了贡献。

然而,在对待中国传统数学和西方数学对世界科技和文明所作出的贡献这个问题上,长期以来,人们使用的数学评判标准多数却是在西方数学中形成的“西方中心论”。这种中心论者或受其影响的学者不顾起码的编年史及一种数学内容在不同文化传统下的不同表现形态而制造出各种中学西源说的神话,试图将中国排除在世界数学发展主流之外。认为当代数学的巨大成就是沿着自古希腊人以来所走过的惟一一条王者之路而发展来的。没有达到严格演绎的知识不能算为科学,只有西方数学与其他学科的关系是近代科学发展的关键性的必要条件。

“西方中心论”的评判标准的理论基础是西方数学哲学,自觉或不自觉地把西方数学的模式、思维方式和价值标准,作为评价世界上不同国家和地区数学(包括中国的传统数学乃至东方数学)与科学的惟一标准。因此,以西方数学的模式来论断筹算在人类文明和近代科学发展中的作用,是不公正的。

数学文化史的研究表明,在对待中国古代数学及其与其他自然科学的关系上,中国古代数学是在中国传统思想文化中产生和发展的,它不会也不可能按照西方数学的模式来发展。以西方数学理性解释的形式作判断和比较是在缺乏对中国古代数学理性思辨的基础上形成的,它忽略了中国数学演化流变的文化特征与西方数学的文化差异,不仅否认了筹算的数学运演操作意义,而且也否认了中国文明在选择和运用这种理性解释系统时的文化创造意义:

第一,中国古代的筹算体系孕育了构造性与机械化和算法特征。运用西方数学价值观来评判中国古代数学,混淆了中西古代数学的文化层次差异和价值取向的差异,这就变相否定了中国古代文明创造筹算的过程及其结构形式的文化意义,从而否定了中国古代作为筹算体系下的算法机械化的数学及其成就。

首先，认为西方数学在文化系统中的作用（文化层次及价值取向）是通向当代数学的惟一一条王者发展之路这一假设，并没有经过检验和证明。认为只有达到严格演绎的知识才能算为科学，照此论理，今天的物理学和化学就算不得科学，这当然是不合理的。其实，就是具有西方数学价值观念的李约瑟博士，也对西方数学模式的价值观心存疑虑。在比较中西古代数学时，李约瑟明确表示："科学史家现在已开始怀疑，希腊的科学和数学偏爱抽象、演绎和纯理论，而忽视具体、经验和应用，这是不是一种进步。"①

其次，从数学文化的功能来分析，与注重逻辑推理的风格和追求演绎证明的目标有明显差异的是，筹算关心确定问题的解答，注重的是运用分离系数法进行筹式的构造与排列，它追求算法的快速、准确无误和简明，并把自身的构造性和机械化的特点和优势发挥到最大限度。认为只有西方数学与其他学科的关系是近代科学发展的关键性的必要条件，实际上是在没有思辨筹算文化意义的前提下，把中国筹算体系下的算法机械化的数学排除在数学主流之外，由此必然会导出这样一个结论：中国古代文明创造的并不断发展的筹算基础上的算法机械化的数学，从一开始就是一种带有严重缺陷的体系，是天生的"畸形儿"，从而中国文明创造筹算的意义以及筹算对中国文明的作用都被淡化乃至变相否定了②。

第二，中国的筹算文化区别于西方的智性文化。以西方数学的理性功能评判筹算，否定了筹算在中国文化中的理性作用。

中国的数学文化说到底是一种筹算文化。而西方数学是建立在古希腊几何学基础上，是一种智性文化。二者各自走出了不同的发展道路。古希腊的文化氛围使它们强化了对数学理性的一贯的连续的整体性信仰，并发展成为用数学理性解释一切的价值取向；而中国的文化氛围使其强化了由对原始数学竹棍排演形式本

① 李约瑟，中国科学技术史（第三卷），科学出版社，第93页，1978年。

② 王宪昌，李约瑟难题的数学诠释——数学文化史研究的一个尝试，大自然探索，1996年第4期

身的神秘性信仰(《周易》64卦的运演形式)向筹算位置模式的转化,并最终使筹算以内蕴性的方式表达数学理性,以算为主,算理结合的特性赋予筹算解释和说明"形而上"问题的文化功能。中国古人长于以方向、位置模式表示不同的数学意义这种十分独特的数学思想方法,发展到筹算通过算式表达,可以起到形式化数学语言的作用,用于间接说明算法的合理性。同时由于筹算位置思维侧重于形象思维,中国位置化的筹算模式具有直觉思维启示的功效,更容易发挥其直观、形象、简洁、方便的优点,这本身又是与中国古算机械化讲求效率、注重结果、推崇算法的简洁、直接和统一和谐一致的。

综上所述,中西古代数学在其民族文化中价值观念的差异,是我们数学史研究中应当十分注意的问题。在数学文化发展史上,可以发现每一种文化系统都有其特定的数学发展和思维模式,在人类文明进展中,一种文明究竟选择何种理性方式作为解释形式的意义,表现出了不同民族的文化层次与价值观的差异。因而,对人类古代数学的比较,应从不同文化系统的数学模式中,提炼出不同民族古代数学的共有规律,并以此为价值尺度来客观、公正地评价。西方数学的模式不会也不可能是人类数学的惟一发展模式,这正如席文提问的那样:"为什么评判非欧文明史总是以其是否或接近于欧洲早期科学或近代科学的某些方面为试金石,为什么早期欧洲科学无需检验呢?"[1]

可以认为,按照中国文化系统发展并在发展过程中取得辉煌成就的算法机械化的数学,应该在没有西方数学价值观念偏见的古代数学理论评价体系中得到客观公正的评价,这其中最重要的一点就是要克服西方数学价值观先入为主的影响,如果不能在占有原始文献的基础上,对古人的工作、思想及方法予以全面的、合乎其研究传统和知识背景的分析和比较,我们就无法理解中华古算的真谛。

---

[1] N.席文.为什么中国没有发生科学革命.科学与哲学,1984年第1期.

参考文献

安作璋 1986. 中国史简编. 济南:山东教育出版社

程民德 1994. 中国数学发展的若干主攻方向. 南京:江苏教育出版社

邓东皋、孙小礼等. 1990. 数学与文化. 北京:北京大学出版社

郭书春 1990.《九章算术》汇校本. 沈阳:辽宁教育出版社

郭书春. 1992. 古代世界数学泰斗刘徽. 济南:山东科技出版社

郭书春. 1993. 中国科学技术典籍通汇·数学卷. 郑州:河南教育出版社

郭书春 1997. 中国古代数学. 北京:商务印书馆

郭书春等. 1995. 成就卓著的中国古代数学. 沈阳:辽宁古籍出版社

洪万生 1983. 中国文化新论·科技篇. 台北:台北联经出版公司

解恩泽、徐本顺. 1993. 世界数学家思想方法. 济南:山东教育出版社

李继闵. 1990.《九章算术》及其刘徽注研究. 西安:陕西人民教育出版社

李约瑟. 1975. 中国科学技术史(第一卷第一分册). 北京:科学出版社

李约瑟. 1978. 中国科学技术史(第三卷). 北京:科学出版社

李约瑟. 1990. 中国科学技术史. 第2卷(科学思想史). 北京:科学出版社

刘钝. 1993. 大哉言数. 沈阳:辽宁教育出版社

刘振修. 1993. 周易与中国古代数学. 长沙:湖南师范大学出版社

罗宏曾. 1994. 中国魏晋南北朝思想史. 北京:人民出版社

钱宝琮. 1932. 中国算学史(上编). 北京:中央研究院历史语言研究所编

钱宝琮. 1957. 中国数学史话. 北京:中国青年出版社

钱宝琮. 1964. 中国数学史. 北京:科学出版社.

王鸿钧. 1989 孙宏安. 古代数学思想方法. 南京:江苏教育出版社

王宪昌. 1990. 数学与人类文明. 延吉:延边大学出版社

王长启等. 1992. 数学思想史. 长春:吉林大学出版社

吴慧颖 1996. 中国数文化. 长沙:岳麓书社

吴文俊. 1984. 几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分). 计算机科学丛书. 北京:科学出版社

吴文俊. 1986. 吴文俊文集. 济南:山东教育出版社

吴文俊. 1987. 秦九韶与《数书九章》. 北京:北京师范大学出版社
吴文俊. 1995. 世界著名数学家传记(上、下集). 北京:科学出版社
席振伟. 1995. 数学的思维方式. 南京:江苏教育出版社
徐利治、郑毓信. 1989. 关系映射反演方法. 南京:江苏教育出版社
徐利治. 1983. 数学方法论选讲. 武汉:华中工学院出版社
袁小明. 1992. 数学思想史导论. 南宁:广西教育出版社
张祖贵. 1995. 数学与人类文化发展. 广州:广东教育出版社
郑毓信、林曾. 1987. 数学·逻辑与哲学. 武汉:湖北人民出版社
中国科学院自然科学史研究所. 1983. 钱宝琮科学史论文选集. 北京:科学出版社
中国科学院自然科学史研究所. 1998. 科学发展的历史借鉴与成功启示. 北京:科学出版社
朱伯崑. 1986. 易学哲学史(上). 北京:北京大学出版社
Calder A. 1980. Constructive Mathematics. Scientific American. Vol. 241. No. 4
Chou S. C. 1988. Mechanical geometry theorem proving: Reidel.
Heath H. 1921. A History of Greek Mathematics, Vol. 1.: Oxford University Press
Hilbert D. 1956. Grundlagen der Geometrie, 8ed
Joseph Needham and Wang Ling. 1959. Science and Civilization in China. Cambridge University Press. Vol. 3. Sec 19
Libbercht U. 1973. Chinese Mathematics in the thirteenth Century. the Shu-shu-chiu-chang of Chin Chiu-shao Cambridge. Massachusetts and London: the MIT Press
Ryser H. J. 1962. Combinatoral Mathematics New York
Smith D E. 1950, History of Mathematics. Vol. II
Smith D E. 1959. Leibniz on his Calculating machine. New York: A Source Book in Mathematics
Struik D J. 1986. A Sourse Book In Mathematics(1200-1800). Princeton University Press
Wu Wen-tsun. 1986. Recent Studies of the History of Chinese Mathematics Berkeley: Proceedings of International Congress of Mathematicians